

Henrik Almström

Beräkningsprogram för bestämning av prestanda hos undervattensladdningar

TOTALFÖRSVARETS FORSKNINGSINSTITUT

Vapen och skydd
147 25 Tumba

FOI-R--0449--SE

Juni 2002

ISSN 1650-1942

Underlagsrapport

Henrik Almström

Beräkningsprogram för bestämning av prestanda hos undervattensladdningar

Utgivare Totalförsvarets Forskningsinstitut - FOI Vapen och skydd 147 25 Tumba	Rapportnummer, ISRN FOI-R--0449--SE	Klassificering Underlagsrapport
	Forskningsområde 5. Bekämpning	
	Månad, år Juni 2002	Projektnummer E2029
	Verksamhetsgren 5. Uppdragsfinansierad verksamhet	
	Delområde 52 Undervattensvapen	
Författare/redaktör Henrik Almström	Projektledare Niklas Alin	
	Godkänd av	
	Uppdragsgivare/kundbeteckning	
	Tekniskt och/eller vetenskapligt ansvarig	
Rapportens titel Beräkningsprogram för bestämning av prestanda hos undervattensladdningar		
Sammanfattning (högst 200 ord) Med dagens persondatorer är det möjligt att utföra beräkningar som för 30 år sedan, med stor ansträngning, kunde genomföras med den tidens superdatorer. Detta gäller möjligheten att simulera en undervattensdetonation och därvid följa förloppet upp till att gasklotet vänder. Om sådana beräkningar genomförs kan ett sprängämnes undervattensprestanda studeras både för ännu ej syntetiserade sprängämnen t.ex. tetraazatetrahedran (tetraederformad N_4 - molekyl) som för optimering av sprängämnessammansättningen. Ett sådant beräkningsprogram togs fram för 30 år sedan men på grund av en implementering som gav dålig energikonservering har programmet inte kunnat utnyttjas vid teoretisk bestämning av undervattenssprängämnens prestanda. I denna rapport presenteras ett nytt beräkningsprogram med energikonservering där även fysikaliska fenomen, som tidigare försumrats, har förts in i koden. Som testsprängämne har valts trotyl (TNT) som får detonera på laddningsdjupen 20 m och 2000 m. Relativt god överensstämmelse erhålles mellan simulering och experiment. Beräkningsprogrammet gör det möjligt att dels studera ännu ej framtagna sprängämnen dels studera nya kompositioner av existerande sprängämnen dels erhålla startvärden för verkanssimuleringar och dels ersätta den teoretiskt bristfälligt underbyggda utvärderingstekniken vid experimentella studier av sprängämnens prestanda. Detta sista uppnås genom att utnyttja försöken till att kalibrera sprängämnesparametrar i beräkningprogrammet och sedan beräkna relevanta prestanda genom att simulera hela expansionsförloppet.		
Nyckelord detonation, prestanda, undervatten, stötvåg, bubbla, energi		
Övriga bibliografiska uppgifter	Språk Svenska	
ISSN 1650-1942	Antal sidor: 57 s.	
Distribution enligt missiv	Pris: Enligt prislista	

Issuing organization FOI – Swedish Defence Research Agency Weapons and Protection SE-147 25 Tumba	Report number, ISRN FOI-R--0449--SE	Report type Base data report
	Research area code 5. Combat	
	Month year June 2002	Project no. E2029
	Customers code 5. Commissioned Research	
	Sub area code 52 Underwater Weapons	
Author/s (editor/s) Henrik Almström	Project manager	
	Approved by	
	Sponsoring agency	
	Scientifically and technically responsible	
Report title (In translation) A computer code to determine the performance of underwater explosives		
Abstract (not more than 200 words) Using personal computers of today it is possible to study phenomena which 30 years ago, with great efforts, could be handled only by super computers of that time. This is the case simulating an underwater detonation and following the process up to the time when the gas bubble starts to collapse. If such a simulation could be performed the performance of not yet synthesised explosives as well as new composition of existing explosives can be studied. Such a computer code was presented 30 years ago but owing to imperfect energy conservation the code could not be used to calculate the performance of underwater explosives. In this report a new code is presented with energy conservation where some phenomena, earlier dismissed, have been implemented. The code has been tested for trinitrotuene (TNT) simulating detonations at the depth of 20 m and 2000 m. The performance, shock energy and bubble energy, from simulation and from experimental data are in good agreement. The code makes it possible to study the performance of not yet synthesised explosives such as tetraazatetrahedrane (tetrahedral N_4), new compositions of existing explosives as well as to improve the theoretical base of the evaluation technique of performance from experimental data. Here the idea is to use the code to calculate the performance of the underwater explosive using the measurements to calibrate the code, instead of calculating the performance directly from the measured data.		
Keywords Detonation, underwater, shock, wave, bubble, energy		
Further bibliographic information	Language Swedish	
ISSN 1650-1942	Pages 57 p.	
	Price acc. to pricelist	

Innehåll

1.	Inledning	6
2.	Fysikaliska processer	7
2.1.	Sprängämnesmodellering	7
2.2.	Vattenmodellering	9
2.3.	Övergångszonen mellan reaktionsprodukter och vatten	11
3.	Kontinuumdynamiska ekvationer för reaktionsprodukterna/gaserna	11
3.1.	Dimensionsanalys	11
3.2.	Bestämning av CJ-tillståndet	12
3.3.	Bestämning av Taylorvågen	14
3.4.	Ekvationer för beskrivning av reaktionsprodukternas fortsatta rörelse	16
4.	Kontinuumdynamiska ekvationer för vatten	17
4.1.	Fasövergång	17
5.	Numerisk implementering	19
5.1.	Kontinuitetsekvationer	19
5.2.	Rörelsekvationer	19
5.3.	Energiekvationer	21
5.4.	Gränsytan mellan gasen och vattnet	22
5.5.	Numerisk lösning av de kopplade differentialekvationerna	22
5.6.	Omzoning av vattenceller	23
6.	Processens skalbarhet	24
7.	Processens beroende av laddningsdjupet	25
8.	Förloppet vid en kompressibel beskrivning	26
9.	Förloppet vid en inkompressibel beskrivning	29
10.	Hur karakteriseras ett undervattenssprängämnes prestanda?	30
10.1.	Beräkningsaspekter	31
10.2.	Energiberäkningsmetodik	32
	Fallet A.	32
	Fallet B.	33
11.	Undervattensprestanda hos TNT	34

11.1. Prestanda vid laddningsdjupet 2000 m	34
11.2. Prestanda vid laddningsdjupet 20 m	40
12. Experimentell bestämning av prestanda för undervattenssprängämnen	47
12.1. Experimentell bestämning av stötvågsenergi	47
12.2. Experimentell bestämning av arbetsförmåga och bubbelenergi	48
13. Sammanfattning och diskussion	49
Referenser	50
Appendix A	52
Appendix B	57

1. Inledning

Vid bestämning av prestanda hos ett undervattenssprängämne är det angeläget att varken sprängämnets geometri eller valet av initiering påverkar resultatet. Ett lämpligt val är att utforma laddningen till ett klot med centruminitiering. Detta utförande minimerar geometrins inverkan samtidigt som storleken på en eventuellt nödvändig booster minimeras. Vidare är det ur simuleringssynpunkt en stor fördel med den sfäriska symmetrin då fenomenen beskrivs med endast en rumskoordinat.

I det mest generella fallet modelleras boostersprängämnet som ett idealiserat sprängämne (CJ-detonation där detonationshastigheten är konstant oberoende av detonationsfrontens krökning) medan huvudsprängämnet modelleras som ett ickeidealt sprängämne, med hjälp av en brinnmodellsbeskrivning. I en kommande rapport kommer ett beräkningsprogram, som behandlar detta fall, att presenteras. Det arbetet bedrivs dels i projektet "Stridsdelar" dels i projektet "Precisionsbekämpning" och koden avses utnyttjas för framtagning av brinnmodeller för ickeideala sprängämnen. I denna rapport begränsar vi oss till fallet att huvudsprängämnet kan behandlas som ett idealiserat sprängämne. En kod som beskrev detta fallet togs fram 1965, ref. 1, och med tillämpningar 1971, ref. 2. En svensk version av koden togs fram vid FOA 1968, ref. 3. Den svenska koden SPHEREX bevarade inte energin vid långa simuleringar varför en ny kod har utvecklats. I den nya koden har mer fysik, som inte behandlades i ref. 1-3, förts in. Den nya koden avses utnyttjas till att:

- A. uppskatta prestanda hos potentiella sprängämnen, ännu ej syntetiserade, tex. N_4 och kvävekluster. Härvid utnyttjas kvantmekaniska beräkningar vad gäller bestämning av bildningsenergi och uppskattningar av sprängämnets täthet. Vidare utnyttjas ett termokemiskt beräkningsprogram (tex. koden CHEETAH, ref. 4) för uppskattning av reaktionsprodukternas tillståndsekvation (energiekvation). Kvaliteten hos denna uppskattning är beroende av hur nära sammansättningen ligger befintliga sammansättningar. Utifrån detta kan sprängämnet modelleras som idealiserat.
- B. bestämning av undervattensprestanda hos existerande sprängämnen och tänkta kombinationer av existerande sprängämnen. För befintliga sprängämnen utförs undervattensförsök. Erhållna mätresultat utnyttjas till att kalibrera sprängämneparametrar i beräkningsprogrammet varefter sprängämnets prestanda beräknas.
- C. uppstartning av tredimensionella verkansberäkningar. Undervattensstridsdelar i minor och torpeder har sällan sfärisk form. Initieringen av huvudsprängämnet sker ofta relativt centralt (stridsdelen till lätt och tung torped). Emellertid antar såväl stötvågen i vattnet som gasbubblan relativt snabbt sfärisk symmetri varför effekterna under den första expansionen kan tillfredsställande beskrivas med aktuell kod. I det läget att stötvågsfronten just tangerar målet (ytfartyget eller ubåten) gäller att vattnet och reaktionsprodukterna innanför stötvågsfronten beskrivs väl av en 1-dimensionell beräkning. Dessa data överförs nu till ett 3-dimensionellt vatten- och gasnät varefter verkansberäkningen fortsätter med tex. koderna Dyna3D eller LS-Dyna.

I avsnitt 2 definieras processens olika faser samt hur sprängämnet, vattnet och övergångszonen sprängämne vatten modelleras. I avsnitt 3 visas hur starttillståndet för reaktionsblandningen/gaserna kan bestämmas samt ges de kontinuumdynamiska ekvationerna för reaktionsprodukterna/gaserna. I avsnitt 4 ges motsvarande information för vattnet. Den

numeriska implementeringen beskrivs i avsnitt 5. I avsnitt 6 diskuteras processens skalbarhet medan processens beroende av laddningsdjupet behandlas i avsnitt 7. I avsnitt 8 beskrivs förloppet vid en kompressibel modellering och relevanta energier. Avsnitt 9 behandlar förlopp och energier för en inkompressibel modellering. I avsnitt 10 diskuteras vilka energier som bäst beskriver ett undervattenssprängämnes prestanda och hur dessa skall beräknas. I avsnitt 11 tillämpas beräkningskoden på TNT dels vid en detonation på 20 m djup, dels vid en detonation på 2000 m djup. I avsnitt 12 beskrivs kortfattat hur prestanda bestäms experimentellt. I avsnitt 13 sammanfattas resultatet.

2. Fysikaliska processer

Processerna vid en undervattensdetonation kan delas upp i tre väsentliga faser:

- A. **Detonationsfasen** innefattande initiering och detonation av sprängämnet.
- B. **Expansionsfasen** innefattande stötvågstransmissionen i vattnet och gasexpansionen upp till det läge där gasranden vänder inåt.
- C. **Kollapsfasen** innefattande vattnets och gasens återströmning och vattnets och gasernas kompression till det läge där gasranden åter vänder utåt.

Vi kommer i det följande att endast behandla faserna A och B då dessa är de relevanta vid bestämning av undervattensprestanda.

2.1. Sprängämnesmodellering.

Den första detonationsteorien utvecklades av Chapman och Jouguet, CJ-teorien. I denna teori antas sönderdelning/reaktioner och därmed sammanhängande energiutveckling i sprängämnet ske momentant dvs. reaktionszonens tjocklek försummas. Vi kallar denna detonationsmodell för idealiserad detonation. Teorin leder till att detonationshastigheten är en konstant oberoende av detonationsfrontens krökning. För att fullständigt beskriva ett sådant detonationsförlopp krävs:

- A. sprängämnets täthet $\rho_{s,0}$,
- B. reaktionsvärmets q_{reak} , vilket är lika med skillnaden mellan sprängämnets bildningsenergi och reaktionsprodukternas bildningsenergi (sammansättningen efter detonationen),
- C. energiekvationen för bildade gaser $e_g(v_g, p, \bar{\lambda}_g)$ och fasta/flytande reaktionsprodukter $e_f(v_f, p, \bar{\lambda}_f)$ där $\bar{\lambda}_g$ och $\bar{\lambda}_f$ anger den kemiska sammansättningen, p är trycket, v_g är gasernas specifika volym och v_f är de fasta/flytande produkternas specifika volym. I de termokemiska programmen (tex. CHEETAH) antas att temperatur och tryckjämvikt råder i reaktionsblandningen. Under dessa förhållanden kan blandningen beskrivas med en energiekvation

$e(v, p)$, där v är blandningens specifika volym, samt med ett varierande reaktionsvärme $q_{reak}(v, p)$.

Vid snabb expansion kommer den kemiska sammansättningen att vara konstant efter en viss expansion varvid reaktionsvärmets blir konstant och

$e(v, p) \approx e_g(v_g, p)$, $v \approx v_g$. Energiekvationen ansätts här på formen (Gruneisen-form med JWJL-parametrarna A, B, a, b, ω)

$$p = f_g(v) + g_g(v)e$$

där
$$f_g = A \left(1 - \frac{\omega}{av} \right) e^{-av} + B \left(1 - \frac{\omega}{bv} \right) e^{-bv}$$

$$g_g = \frac{\omega}{v}$$

Vid en mer realistisk beskrivning tas hänsyn till att reaktioner/energiomsättning sker över en ändlig reaktionszon. Detta detonationsförlopp kallas ickeideal detonation om detonationsfronten har ändlig krökning. Vid gränsfallet att krökningen går mot noll, dvs. detonationsfronten blir plan, kallas detonationsförloppet idealt i vilket fall fullständig energiomsättning har skett vid reaktionszonens bakkant, ZND-detonation (ref. 5). Ickeideal detonation vid sfärisk symmetri kommer att behandlas i en kommande rapport.

Vid expansionen av gaserna i gasklotet kan hänsyn tas till värmeledning i gasen (på grund av den sfäriska symmetrin förekommer ingen konvektion). Temperaturen hos reaktionsprodukterna/gasen ges av (utgående från energiekvationen på Gruneisen-form, se Appendix A)

$$e = \frac{1}{k_g(v)} \left(e_{CJ} + \int_{T_{CJ}}^{T_{k_g}(v)} c_{gv}(T') dT' - \int_{v_{CJ}}^v k_g(v') f_g(v') dv' \right)$$

där
$$k_g = \left(\frac{v}{v_{CJ}} \right)^\omega$$

Nära CJ-tillståndet kan specifika värmets vid konstant volym ansättas till ett konstant värde $c_{gv} = 0.55 \text{ cal/(g K)}$, vilket ger

$$e = \frac{1}{k_g(v)} \left(e_{CJ} + c_{gv} (T_{k_g}(v) - T_{CJ}) - \int_{v_{CJ}}^v k_g(v') f_g(v') dv' \right)$$

Gasens värmeledningsförmåga sätts till (ref. 6)

$$\lambda_g = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.8}$$

där $T_0 = 298K$
 $\lambda_0 = 0.0259 \text{ J/(m s K)}$

2.2. Vattenmodellering.

Sprängämnet och dess omvandling ges av en förenklad beskrivning i detta rapport. Vattnet beskrivs däremot med en noggrann tvåfasmodell där vattnet som vätska beskrivs av ekvationen (ref. 5)

$$p = \frac{f_1(e)}{v_v} + \frac{f_2(e)}{v_v^3} + \frac{f_3(e)}{v_v^5} + \frac{f_4(e)}{v_v^7}$$

där

$$f_1 = \sum_0^7 c_{11}(i)e^i, \quad 0 \leq e \leq e_{11}$$

$$f_1 = \sum_0^6 c_{12}(i)(e - e_{11})^i, \quad e_{11} < e \leq e_{12}$$

$$f_1 = \sum_0^6 c_{13}(i)(e - e_{12})^i, \quad e_{12} < e$$

$$f_2 = \sum_0^6 c_{21}(i)e^i, \quad 0 \leq e \leq e_{21}$$

$$f_2 = \sum_0^8 c_{22}(i)(e - e_{21})^i, \quad e_{21} < e \leq e_{22}$$

$$f_2 = \sum_0^4 c_{23}(i)(e - e_{22})^i, \quad e_{22} < e$$

$$f_3 = \sum_0^1 c_{31}(i)e^i$$

$$f_4 = \sum_0^1 c_{41}(i)e^i$$

där koefficienterna ges i appendix B, samt tvåfasytan, med jämvikt mellan vätskeformigt vatten och gasformigt vatten, beskrivs av ångtabeller (ref. 7). Sambanden

$$e_f = e_f(p),$$

$$e_g = e_g(p),$$

$$v_f = v_f(p),$$

$$v_g = v_g(p),$$

$$s_f = s_f(p),$$

$$s_g = s_g(p),$$

anpassas till lämpliga analytiska uttryck. Energins nollnivå är vald till $e_0 = 0$ för $v_0 = 1.001793 \text{ cm}^3/\text{g}$, $p_0 = p_{atm} = 1.013 \text{ bar}$.

Värmetransporten i vattnet är av visst intresse då gränsskiktet närmast spränggaserna kommer att stötvågsupphetas till höga temperaturer (ca 1000 C). Vattnets tillståndsekvation $e = e_v(v, T)$ bestäms utgående från vattnets energiekvation given på Gruneisenform (ref. 8, 9)

$$p = f_v(v) + g_v(v)e.$$

För $v \leq v'_0$ har vi

$$f_v = K \frac{\mu(1 + 0.75\mu - \mu^2)}{\left(1 - \mu \left(s_1 - 1 + s_2 \left(1 - \frac{v}{v'_0}\right) + s_3 \left(1 - \frac{v}{v'_0}\right)^2 \right) \right)^2}$$

$$\mu = \frac{v'_0}{v} - 1$$

$$g_v = \frac{\Gamma(v)}{v}$$

$$\Gamma(v) = 0.5 - 1.5 \left(\frac{v}{v'_0} - 1 \right)$$

$$K = 2.1865 \text{ GPa}$$

$$s_1 = 2.56$$

$$s_2 = -1.986$$

$$s_3 = 0.226$$

där v'_0 är vald så att $p_{atm} = f_v(v_0)$.

För $v > v'_0$ har vi

$$f_v = K\mu$$

$$\Gamma(v) = 0.5$$

Vi erhåller

$$e = \frac{1}{k_v(v)} \left(\int_{T_0}^{Tk_v(v)} c_v(T') dT' - \int_{v_0}^v k_v(v') f_v(v') dv' \right)$$

där

$$k_v = \exp \left(\int_{v_0}^v \frac{\Gamma(v')}{v'} dv' \right)$$

$$T_0 = 298 \text{ K}$$

Vattnets värmekapacitet ansätts konstant (ref. 9) till $c_v = 0.78 \text{ cal/(g K)}$ vilket ger

$$e = \frac{1}{k_v(v)} \left(c_v (T k_v(v) - T_0) - \int_{v_0}^v k_v(v') f_v(v') dv' \right)$$

Vattnets värmeledningskoefficient sätts till en konstant (ref. 10) $\lambda_v = 0.560 \text{ J/(m s K)}$

2.3. Övergångszonen mellan reaktionsprodukter och vatten

I övergångszonen kan ett flertal processer uppträda:

- A. Värmeöverföring mellan het gas och vatten genom konvektion.
- B. Strålning från gasklotet, svartkroppsstrålare, ut i vattnet.
- C. Strålningsabsorption i ett gränsskikt av det omgivande vattnet, särskilt om fasta reaktionsprodukter upplagras i det omgivande vattnet.
- D. Reaktion mellan heta metallpartiklar (i undervattensladdningar utnyttjas ofta metaller) och omgivande vatten. Vid sfärisk symmetri torde denna process avstanna då metallen, i ett gränsskikt av reaktionsprodukterna, har förbrukats, detta då ingen turbulent omröring sker bland reaktionsprodukterna (gäller sfärisk symmetri) utan endast långsam diffusion av metallpartiklarna.

Av dessa processer har endast punkt B och C införts i koden. Implementeringen beskrivs i avsnitt 5.4.

3. Kontinuumdynamiska ekvationer för reaktionsprodukterna/gaserna

Innan vi sätter upp differentialekvationerna för reaktionsprodukterna måste vi bestämma reaktionsprodukternas starttillstånd dvs. Taylorvågen (ref. 5). Vi börjar med en dimensionsanalys av en punktinitierad detonation.

3.1. Dimensionsanalys

Vi studerar den sfäriska utbredningen av detonationsfronten innan den når begränsningsytor. Detonationens tillstånd styrs av massans, impulsens och energins bevarande över detonationsfronten. Instorheter är vid idealiserad detonation sprängämnets täthet $\rho_{s,0}$, spränggasernas energiekvation $e = e(v, p)$, samt detonationsenergin q_{reak} . Härur erhålles detonationshastigheten D , detonationstrycket p_{CJ} , detonationstätheten $\rho_{CJ} = 1/v_{CJ}$ (se avsnitt 3.2). Ansätt energiekvationen på JW-form

$$e = \frac{v}{\omega} \left(p - A \left(1 - \frac{\omega}{av} \right) e^{-av} - B \left(1 - \frac{\omega}{bv} \right) e^{-bv} \right)$$

Vi kan nu skriva trycket (täthet och partikelhastighet skrivs på samma form) inne i gasen som

$$p = p_{CJ} f(\rho_0, D, p_{CJ}, A, a, B, b, \omega, r, t).$$

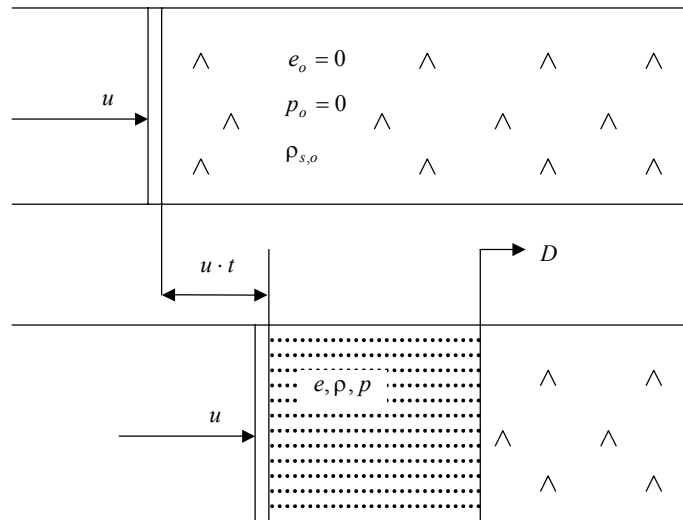
Övriga storheter är funktioner av ovanstående parametrar. Funktionen f måste vara dimensionslös och vara funktion av dimensionslösa storheter. Detta krav leder till

$$f = f\left(\omega, \frac{\rho_0}{a}, \frac{\rho_0}{b}, \frac{p_{CJ}}{q_{reak}}, \frac{p_{CJ}}{A}, \frac{p_{CJ}}{B}, \frac{p_{CJ}}{\rho D^2}, \frac{r}{Dt}\right).$$

Den viktiga observationen är att tryck, täthet, partikelhastighet alla är funktioner av $\frac{r}{Dt}$. Orsaken till detta är att ovanstående fysikaliska samband inte innehåller någon längdstorhet förutom r och Dt . Mycket nära initieringspunkten leder detta till ofysikaliska förhållanden.

3.2. Bestämning av CJ-tillståndet

Studera en plan detonationsfront enligt figur 1 (e_0 och p_0 försummas)



Figur 1. Plan detonation

Massans bevarande ger

$$\rho_{s,0} Dt = \rho (D - u)t \quad (1)$$

Impulsens bevarande ger

$$pt = \rho_{s,0} Dtu \quad (2)$$

Energins bevarande ger

$$\rho_{s,0} Dtq_{reak} + put = \rho_{s,0} Dte + \rho_{s,0} Dt \frac{u^2}{2} \quad (3)$$

Från (1) erhålles

$$v = v_{s,0} \left(1 - \frac{u}{D} \right), \quad \frac{u}{D} = 1 - \frac{v}{v_{s,0}} \quad (4)$$

Från (2) erhålles

$$p = \rho_{s,0} uD, \quad uD = pv_{s,0} \quad (5)$$

Från (4) och (5) erhålles

$$u^2 = u \frac{pv_{s,0}}{D} = p(v_{s,0} - v) \quad (6)$$

vilket insatt i (3) ger Hugoniotekvationen

$$e(v, p) - q_{reak} = \frac{1}{2}(v_{s,0} - v)p, \quad p = p_H(v) \quad (7)$$

Från (4) och (5) erhålles Rayleighlinjen

$$p = \frac{D^2}{v_{s,0}^2} (v_{s,0} - v) \quad (8)$$

Enligt CJ-teorin ges CJ-tillståndet (detonationstillståndet) av CJ-villkoret

$$D = u_{CJ} + c_{CJ}$$

där c_{CJ} är ljudhastigheten bakom fronten.

Vi skall visa att detta villkor är samma villkoret som att Rayleighlinjen skall tangera Hugoniotkurvan. Ljudhastigheten för en punkt på Hugoniotkurvan ges av kurvans lutning enligt

$$c^2 = -v^2 \frac{dp_H}{dv} \quad (9)$$

Villkoret att Rayleighlinjen tangerar Hugoniotkurvan ges av

$$\frac{dp_H}{dv} = \frac{p}{v_{s,0} - v} = -\frac{D^2}{v_{s,0}^2} \quad (10)$$

Insatt erhålles

$$c^2 = D^2 \frac{v^2}{v_{s,0}^2}.$$

Om detta är detonationstillståndet erhålles från (4)

$$c_{CJ}^2 = D^2 \left(1 - \frac{u_{CJ}}{D}\right)^2$$

eller

$$D = u_{CJ} + c_{CJ}$$

varför tangeringsvillkoret är det samma som CJ-villkoret. Ur tangeringsvillkoret erhålles D samt från (5) och (6) erhålles p_{CJ} och v_{CJ} .

3.3. Bestämning av Taylorvågen

Vi önskar bestämma trycket, specifika volymen och partikelhastigheten innanför detonationsfronten vid idealiserad detonation. Vi utgår från Eulers rörelseekvationer (vi antar här att vi kan arbeta med den totala tätheten även vid fallet att reaktionsprodukterna är sammansatta av gaser och fasta/vätskeformiga produkter. Detta är inte korrekt om fasta/vätskeformiga produkter inte följer gasernas rörelse)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \bar{u}) &= 0, \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \end{aligned}$$

Bakom detonationsfronten är förloppet isentropiskt, (reversibelt och värmeisolerat). Från energiekvationen $e = e(v, p)$ erhålles isentropen $p = p_s(v)$ genom CJ-tillståndet ur systemet

$$\begin{aligned} \frac{de}{dv} &= \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right) \frac{dp}{dv} = -p, \\ p(v_{CJ}) &= p_{CJ} \end{aligned}$$

Vid energiekvation på JWL-form erhålles $p = p_s(v)$ till

$$p = Ae^{-av} + Be^{-bv} + \left(p_{CJ} - Ae^{-av_{CJ}} - Be^{-bv_{CJ}}\right) \left(\frac{v_{CJ}}{v}\right)^{\omega+1}.$$

Vi har

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dv} \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{c^2}{v^2} \frac{\partial v}{\partial r}$$

där $c = c(v)$ betecknar reaktionsprodukternas ljudhastighet ($c^2 = -v^2 \frac{dp_s}{dv}$). Vi byter nu till $v = 1/\rho$ och erhåller vid sfärisk symmetri

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} &= v \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{uv}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{c^2}{v} \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned}$$

Från dimensionsanalysen vet vi att $v = v\left(\frac{r}{Dt}\right)$ och $u = u\left(\frac{r}{Dt}\right)$. Insatt erhålles med $z = \frac{r}{Dt}$

$$(u - Dz) \frac{dv}{dz} = v \frac{du}{dz} + 2 \frac{uv}{z} \quad (11)$$

$$(u - Dz) \frac{du}{dz} = \frac{c^2}{v} \frac{dv}{dz} \quad (12)$$

Med (12) insatt i (11) och från (12) erhålles med u som oberoende variabel

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \frac{z((u - Dz)^2 - c^2)}{2uc^2}, \\ \frac{dv}{du} &= \frac{v(u - Dz)}{c^2} \end{aligned}$$

med ”begynnelsevillkoren”

$$\begin{aligned} z(u_{CJ}) &= 1, \\ v(u_{CJ}) &= v_{CJ} \end{aligned}$$

Löses med Runge Kutta av fjärde ordningen. Från lösningen erhålles

$$\begin{aligned} v &= v(r), \\ p &= p(r), \\ e &= e(r), \\ u &= u(r) \end{aligned}$$

för $0 \leq r \leq r_{b,0}$. Låt oss studera hastighetsförloppet intill detonationsfronten. Ansätt

$$z = 1 - A_0(u_{CJ} - u)^\alpha + \dots,$$

$$v = v_{CJ} + B_1(u_{CJ} - u) + \dots$$

Vid fronten gäller CJ-villkoret $D = u_{CJ} + c_{CJ}$. Insatt erhålles

$$u = u_{CJ} \left(1 - \sqrt{2(1-z) \frac{c_{CJ}}{u_{CJ}}} + \dots \right).$$

Hastighetsderivatan invid fronten ges av

$$\frac{du}{dz} = - \frac{c_{CJ}}{\sqrt{2(1-z) \frac{c_{CJ}}{u_{CJ}}}} + \dots$$

vilket visar att hastighetsprofilen är mycket spetsig!

3.4. Ekvationer för beskrivning av reaktionsprodukternas fortsatta rörelse

Som tidigare kommer vi att använda index "g" för att beteckna reaktionsprodukterna. Som nämnt under punkt 3.2 kan strömningen med gaser och fasta/flytande produkter kräva en tvåfasströmningsmodell. Den aktuella koden beskriver ett enfassystem. Reaktionsprodukterna kommer alternativt att kallas gaser även om fasta/flytande produkter ingår.

Gaserna beskrivs av kontinuitetsekvationen

$$\dot{\rho}_g = -\rho_g \nabla \circ \vec{u},$$

och kraftekvationen

$$\rho_g \dot{\vec{u}} = -\nabla(p + q)$$

där q är ett pseudotryck (ref. 11 samt avsnitt 5.2)

samt energiekvationen

$$\dot{e}_g = -(p + q)\dot{v}_g + \frac{1}{\rho_g} \nabla \circ (\lambda_g \nabla T)$$

där

$$e_g = e_g(v_g, p)$$

$$T = T(v_g, p)$$

$$\lambda_g = \lambda_g(T)$$

är givna i avsnitt 2.1.

4. Kontinuumdynamiska ekvationer för vatten

Helt analogt som för gaserna erhålles ekvationerna, där som tidigare index "v" står för vatten,

$$\dot{\rho}_v = -\rho_v \nabla \circ \bar{u}$$

$$\rho_v \ddot{u} = -\nabla(p + q)$$

$$\dot{e}_v = -(p + q)\dot{v}_v + \frac{1}{\rho_v} \nabla \circ (\lambda_v \nabla T)$$

där $e_v = e_v(v_v, p),$

$$T = T(v_v, p),$$

$$\lambda_v = \lambda_v(T)$$

ges i avsnitt 2.2.

Starttillståndet för vattnet utgörs av komprimerat vatten till det hydrostatiska trycket

$$p_h = p_{atm} + \rho_{v,m} g d$$

där $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$d = \text{vattendjupet}$$

$$p_{atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_{v,m} = \text{aktuella medeltätheten}$$

För att erhålla starttillståndet utgår vi från vatten vid atmosfärstryck, p_{atm} , och rumstemperatur, $T_0 = 298 \text{ K}$ då vattnets täthet är $\rho_{v,0} = 0.9982 \text{ g/cm}^3$. Vattnet komprimeras nu isentropiskt upp till aktuellt hydrostatiskt tryck. Härvid gäller ekvationen

$$de_v = -p dv_v$$

$$p(v_{v,0}) = p_{atm}$$

4.1. Fasövergång

När tillståndet i en vattencell v_v, p, e, T

$$e = e_v(v_v, p)$$

$$T = T_v(v_v, p)$$

kommer till faslinjen mellan vätska och gas

$$p = p_f(v_v)$$

$$T = T_f(v_v)$$

startar en förångningsprocess. Härvid gäller

$$e = (1 - \lambda)e_f(p) + \lambda e_g(p)$$

$$v = (1 - \lambda)v_f(p) + \lambda v_g(p)$$

där λ anger viktsandelen ånga i blandningen. Elimineras λ erhålles

$$e = F(p) + G(p)v$$

där

$$F(p) = \frac{v_g(p)e_f(p) - v_f(p)e_g(p)}{v_g(p) - v_f(p)}$$

$$G(p) = \frac{e_g(p) - e_f(p)}{v_g(p) - v_f(p)}$$

Energiekvationen där stötvågor kan röra sig genom cellen ges av (här försummas värmeledningen)

$$\dot{e} = -(p + q)\dot{v}$$

vilket ger tryckekvationen

$$\dot{p} = -\frac{(G + p + q)}{F' + G'v} \dot{v}$$

där

$$F' = \frac{dF}{dp},$$

$$G' = \frac{dG}{dp}$$

I fallet att inga stötar förekommer gäller att entropin bevaras under förångningsprocessen (värmeledningen försummas). Detta ger

$$s = (1 - \lambda)s_f(p) + \lambda s_g(p)$$

där s är den entropi som vätskan hade då ångprocessen startade. Ekvationen ger $\lambda = \lambda(p)$. Från ekvationen

$$v = (1 - \lambda)v_f(p) + \lambda v_g(p)$$

erhålles $v = v(p)$.

5. Numerisk implementering

Den numeriska implementeringen är lika för gasen som för vattnet varför vi i detta avsnitt inte använder index "g" eller "v".

5.1. Kontinuitetsekvationer

Vid diskretiseringen delas materien upp i koncentrisk skal med radierna $r_{i,0}$, $i = 1, \dots, n$.

Rörelsen hos skalens begränsningsytor skall beräknas (Lagrangeformalism):

$$r_i = r_i(t), \quad r_i(0) = r_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n$$

Massan $m_{i,c}$ i ett skal bevaras under förloppet vilket ger

$$m_{i,c} = \rho_{i,0} V_{i,0} = \rho_i V_i$$

där $\rho_{i,0}$ och ρ_i står för medeltätheten i cell i och

$$V_{i,0} = \frac{1}{3} (r_{i,0}^3 - r_{i-1,0}^3)$$

$$V_i = \frac{1}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3)$$

där vi räknar volymer per rymdvinkelenhet. Alla ekvationer i sfärisk symmetri är giltiga för försumbart små rymdvinklar. Vi ser att då $r_i(t)$ är kända är alla $v_i = 1/\rho_i$ kända (egentligen medelvärden men vi kommer i fortsättningen att behandla värden inne i celler som i rummet konstanta).

5.2. Rörelseekvationer

Vi skall beräkna rörelsen hos gränssytorna $r_i(t)$. För detta ändamål för vi del av massa från cellerna i och $i+1$ till denna gränssyta. Det visar sig vid studiet av elastiska material (kommer att behandlas i en kommande rapport angående modellering av detonationsförlopp) att den lämpliga delningen ges av

$$m_i = \frac{1}{3} (\rho_{i+1,0} (r_{i+1,0,m}^3 - r_{i,0}^3) + \rho_{i,0} (r_{i,0}^3 - r_{i,0,m}^3))$$

där

$$r_{j,0,m} = \left(\frac{1}{3} (r_{j,0}^2 + r_{j,0} r_{j-1,0} + r_{j-1,0}^2) \right)^{1/2}, \quad j = i, i+1$$

För att erhålla en korrekt diskretisering av rörelseekvationen utnyttjas systemets Lagrange-funktion. Vi har

$$L(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_n) = T - U_{inre}$$

där

$$T = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \circ \dot{r}_i = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i (\dot{r}_i)^2$$

$$U_{inre} = \sum_2^n \left(- \int_{V_{i,0}}^{V_i} p_{s,i} dV \right),$$

där $p_{s,i}(v)$ är det isentropa tryckförloppet genom trycktillståndet $p_{s,i}(v_i) = p(v_i, e_i)$.

Rayleighs dissipationsfunktion ges av, se ref. 11,

$$F_{dis} = -C_L \rho_0 \sum_2^n \left(\frac{c_i \Delta r_i}{V_i} \right) \frac{1}{2} \dot{V}_i^2 + C_Q \rho_0 \sum_2^n \left(\frac{\Delta r_i}{V_i} \right)^2 \frac{1}{3} \dot{V}_i^3 \Theta(-\dot{V}_i)$$

där $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Δr_i = cellens bredd,

c_i = cellens ljudhastighet

$C_L = 0.01$,

$C_Q = 2.25$.

Den första termen svarar mot den lineära viskositeten (dämpar svängningar, angivet C_L är endast ett typvärde) medan den andra termen svarar mot den artificiella viskositeten, se ref. 11. Angivet C_Q är endast ett typvärde.

Rörelseekvationerna ges av

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{\partial F_{dis}}{\partial \dot{r}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

vilket ger

$$m_i \dot{u}_i = r_i^2 (p_i + q_i - p_{i+1} - q_{i+1})$$

där

$$q_i = q_{L,i} + q_{Q,i}$$

$$q_{L,i} = -C_L \rho_0 c_i \Delta r_i \frac{\dot{V}_i}{V_i}$$

$$q_{Q,i} = C_Q \rho_0 \left(\Delta r_i \frac{\dot{V}_i}{V_i} \right)^2 \Theta(-\dot{V}_i)$$

Vi kan också härleda kraftekvationerna ur ett diskret mekaniskt system. Systemet består av ett antal masskal, massa m_i , med försumbar utbredning. Mellan masskalen, i cellerna, har vi i rummet homogena förhållanden med trycken p_i som vi kan associera med en isentrop fjäder per ytenhet, lineära dämpare $q_{L,i}$ per ytenhet och ickelineära dämpare $q_{Q,i}$ per ytenhet. Kraftekvationen för det i :te skalet vid infinitesimal rymdvinkel ges direkt av

$$m_i \ddot{u}_i = r_i^2 (p_i + q_i - p_{i+1} - q_{i+1}).$$

5.3. Energiekvationer

Tillståndsekvationen $T = T(v, p)$ ger medeltemperaturen i en cell enligt $T_i = T(v_i, p_i)$. Denna temperatur ansätts i cellmitten. Temperaturgradienten vid den i :te gränssytan ges av

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_i \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\left(\frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2} \right)}$$

Temperaturen i gränsskiktet uppskattas till

$$T_{i,gr} \approx T_i + \left(\frac{r_i - r_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \right) (T_{i+1} - T_i)$$

Värmeflödet genom den i :te gränssytan ges nu av

$$\dot{q}_{i,ledn} = 2\lambda(T_{i,gr}) r_i^2 \frac{T_{i+1} - T_i}{r_{i+1} - r_{i-1}}$$

Vi erhåller nu energiekvationen till

$$m_{i,c} \dot{e}_i = -m_{i,c} (p_i + q_i) \dot{v}_i - \dot{q}_{i-1,ledn} + \dot{q}_{i,ledn}$$

Från kontinuitetsekvationen har vi

$$\dot{v}_i = \frac{1}{m_{i,c}} (r_i^2 u_i - r_{i-1}^2 u_{i-1})$$

vilket ger

$$m_{i,c} \dot{e}_i = -(p_i + q_i) (r_i^2 u_i - r_{i-1}^2 u_{i-1}) - 2\lambda(T_{i-1,gr}) r_{i-1}^2 \frac{T_i - T_{i-1}}{r_i - r_{i-2}} + 2\lambda(T_{i,gr}) r_i^2 \frac{T_{i+1} - T_i}{r_{i+1} - r_{i-1}}$$

5.4. Gränsytan mellan gasen och vattnet

Vid gränsytan mellan gas och vatten ersätts värmeledningen med energiöverföring via svartkroppsstrålning. Om temperaturen i den yttersta gascellen är T_g och temperaturen i den innersta vattencellen är T_v ges energiflödet från gasen till vattnet av (ref. 10)

$$\dot{q}_{strål} \approx r^2 C_{sv} (\epsilon_g T_g^4 - a_{v,g} T_v^4)$$

där

$$C_{sv} = 5.66 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{K}^4)$$

$$\epsilon_g \approx a_{v,g} \approx 0.13$$

5.5. Numerisk lösning av de kopplade differentialekvationerna

Vi har nu överfört de partiella differentialekvationerna till kopplade första ordningens ordinära differentialekvationer i tiden. Ekvationerna ges av

$$m_i \dot{u}_i = r_i^2 (p_i + q_i - p_{i+1} - q_{i+1}),$$

$$m_{i,c} \dot{e}_i = -(p_i + q_i)(r_i^2 u_i - r_{i-1}^2 u_{i-1}) - 2\lambda(T_{i-1,gr}) r_{i-1}^2 \frac{T_i - T_{i-1}}{r_i - r_{i-2}} + 2\lambda(T_{i,gr}) r_i^2 \frac{T_{i+1} - T_i}{r_{i+1} - r_{i-1}},$$

$$\dot{r}_i = u_i$$

där

$$v_i = \frac{3m_{i,c}}{r_i^3 - r_{i-1}^3}$$

Genom att utnyttja det numeriska schemat Runge-Kutta av fjärde ordningen kan dessa kopplade ekvationer lösas med maskinnoggrannhet varvid förloppet kan följas i tiden godtyckligt länge med bevarad noggrannhet. Ett bra mått på stabilitet och noggrannhet är att följa utvecklingen av den totala energin $E(t)$ som skall vara konstant då inga yttre krafter verkar på systemet. Vi kräver

$$\frac{|E(t) - E(0)|}{E(0)} < 10^{-12}$$

där

$$E(0) = \text{startenergin}$$

$$E(t) = E_{g,k} + E_{g,i} + E_{v,k} + E_{v,i}$$

där

$$E_{g,k} = \text{gasens rörelseenergi,}$$

$$E_{g,i} = \text{gasens inre energi}$$

$$E_{v,k} = \text{vattnets rörelseenergi,}$$

$$E_{v,i} = \text{vattnets inre energi.}$$

För att erhålla en stabil lösning måste tidsteget fortlöpande anpassas till förloppet. Härvid gäller

$$\Delta t = k_{pessimist} \min \left(\frac{r_i - r_{i-1}}{\sqrt{c_i^2 + v_i q_i}} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

där $k_{pessimist} \leq \frac{1}{10}$

Även om vi löser de kopplade differentialekvationerna mycket noggrant innebär detta inte att vi har löst de partiella differentialekvationerna mycket noggrant då detta beror på antalet celler som domänen delats upp i. För att bestämma denna upplösning måste en beräkning utföras med n celler samt en beräkning med $2n$ celler varefter resultaten jämförs.

En av skillnaderna med aktuell kod mot tidigare koder, ref. 1-3, är det högre ordningens schema vid tidsstegningen.

5.6. Omzoning av vattenceller

Under processen ökar gascellernas volym bortsett från tillfälliga svängningar i gasen. Antalet gasceller väljs därför relativt stort (i beräkningarna valdes $n_g = 800$).

För vattencellerna gäller omvänt att dessa successivt minskar sina tjocklekar. Om vi approximerar vattenrörelsen att vara inkompressibel, gäller för den i :te vattencellen

$$r_{i,0}^3 - r_{i-1,0}^3 = r_i^3 - r_{i-1}^3$$

vilket ger

$$r_i - r_{i-1} = (r_{i,0} - r_{i-1,0}) \frac{r_{i,0}^2 + r_{i,0}r_{i-1,0} + r_{i-1,0}^2}{r_i^2 + r_i r_{i-1} + r_{i-1}^2} \approx (r_{i,0} - r_{i-1,0}) \left(\frac{r_{i,0}}{r_i} \right)^2$$

Av detta framgår att cellbredden har halverats då $r_i = \sqrt{2}r_{i,0}$. Då tidssteget är proportionellt mot minsta cellbredden, se avsnitt 5.5, innebär detta att tidssteget snabbt minskar när r_i ökar.

För att kompensera för detta slås minsta cellen ihop med den minsta närliggande (undantag för vattencellen invid gasen) vattencellen när den minsta cellens bredd är mindre än

$$\frac{r_{i,0} - r_{i-1,0}}{2}. \text{ Antag att den minsta närliggande cellen är den } i+1\text{:ta cellen. Vid hopslagningen}$$

kräver vi att massan bevaras. Vidare måste den nya volymen vara lika med summan av delvolymerna dvs.

$$m_{i,c,ny} = m_{i,c} + m_{i+1,c}$$

$$V_{i,ny} = V_i + V_{i+1}$$

vilket ger $v_{i,ny} = \frac{V_{i,ny}}{m_{i,ny}}$

Vi kräver vidare att ursprungsvolymererna adderas

$$V_{i,0,ny} = V_{i,0} + V_{i+1,0}$$

Rörelseenergin bevarande ger

$$\frac{1}{2} m_{i,ny} u_{i,ny}^2 = \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \frac{1}{2} m_{i+1} u_{i+1}^2$$

vilket ger den nya hastigheten till storlek och riktning. Om vi skulle kräva att den totala inre energin skulle bevaras erhålles

$$e_{i,ny} = \frac{m_i e_i + m_{i+1} e_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}$$

Från vattnets energiekvation erhålles nu

$$p_{i,ny} = p_v(v_{i,ny}, e_{i,ny})$$

Det visar sig att detta beräknade tryck, för celler som väsentligt stötvågsupphettats, kraftigt avviker från trycken p_i och p_{i+1} varför vi inte kan kräva att den totala inre energin skall bevaras. Om vi istället kräver att summan av arbetsförmågorna hos cellerna i och $i+1$ skall bevaras hos den nya cellen dvs.

$$m_{i,ny} \int_{(p_{atm})}^{v_{i,ny}} p dv = m_i \int_{(p_{atm})}^{v_i} p dv + m_{i+1} \int_{(p_{atm})}^{v_{i+1}} p dv$$

där expansionen sker isentropiskt, erhålles ett $p_{i,ny}$ som ligger mellan p_i och p_{i+1} . Vi beräknar nu energiförlusten

$$\Delta E_i = m_{i,ny} e_v(v_{i,ny}, p_{i,ny}) - m_i e_v(v_i, p_i) - m_{i+1} e_v(v_{i+1}, p_{i+1})$$

Denna energi förs successivt tillbaka till den nya i :te cellen under ett antal tidscykler så att den totala energin bevaras.

6. Processens skalbarhet

Om gravitationsfält, värmeledning och strålning försummas gäller att parametrar som påverkar processen är:

Längder: $r_{b,0}$ = sprängämnets startradie
 r = aktuell rumskoordinat

Tider: t = aktuell tid

Tätheter: $\rho_{s,0}$ = sprängämnets täthet
 $\rho_{v,0}$ = vattnets täthet vid atmosfärstryck

Hastigheter: D = sprängämnets detonationshastighet

Tryck: p_h = hydrostatiska trycket
 p_{CJ} = detonationstrycket
 q_{reak} = reaktionsvärmets
 A, B = parametrar i energiekvationen för reaktionsprodukterna
trycktermer i energiekvationen för vattnet

Hastigheter, tryck och tätheter i processen är funktioner av ovanstående parametrar. Vi har tex.

$$p = p_h f(\rho_{s,0}, \rho_{v,0}, D, p_h, p_{CJ}, q_{reak}, A, B, \dots, r_{b,0}, r, t).$$

Då f måste vara en funktion av dimensionslösa storheter fås

$$f = f\left(\frac{\rho_{s,0}}{\rho_{v,0}}, \frac{\rho_{s,0} D^2}{p_h}, \frac{p_{CJ}}{p_h}, \frac{A}{p_h}, \dots, \frac{r}{r_{b,0}}, \frac{Dt}{r_{b,0}}\right)$$

Av uttrycket för f framgår att processen är skalbar enligt skalningen

$$r' = \lambda r \\ t' = \lambda t$$

Om vi beräknar förloppet med en godtycklig sprängämnesradie $r_{b,0}$ erhålles lösningen för andra laddningsradier genom en enkel skalning i rum och tid. Vid beräkningarna har gravitationsfältet försumrats då detta bryter den sfäriska symmetrien. Värmeledningen bryter inte den sfäriska symmetrien men effekten är inte skalbar. Vid beräkningarna bör därför laddningsradien väljas till realistiska/använda värden tex. $r_{b,0} = 1 \text{ dm}$ så att värmeledningseffekter vid en begränsad skalning obetydligt påverkar lösningen. Å andra sidan är värmeledningens påverka på lösningen begränsad vid undervattenssprängämnen utan metaller (måttliga reaktionstemperaturer). Vid aktuella beräkningar med TNT valdes $r_{b,0} = 1 \text{ cm}$.

7. Processens beroende av laddningsdjupet

Vid skalningen ovan gäller att alla tryck är oförändrade. Ett nytt laddningsdjup kräver en helt ny beräkning. Med fixerad laddningsradie, tex. $r_{b,0} = 1 \text{ cm}$, kommer tiden t_m till maximal bubbelradie att minska med ökande laddningsdjup. Detta innebär att beräkningstiden minskar vilket är önskvärt då beräkningstiden, med en processor (klockfrekvens 450 MHz), annars kan uppgå till veckor.

En uppskattning av t_m kan erhållas genom att approximera processen som inkompressibel och ansätta ett starttryck p_0 hos gasen, som behandlas som isentrop med konstant gammavärde, se tex. ref. 12. Vi erhåller

$$t_m \approx C \left(\frac{p_0}{\rho_{v,0}} \right)^{1/3} \frac{r_{b,0}}{\left(\frac{p_h}{\rho_{v,0}} \right)^{5/6}}$$

där C är en långsamt varierande funktion av $\frac{p_h}{p_0}$. I avsnitt 10 beskrivs prestandaparmetrar för undervattenssprängämnen. Dessa parametrars beroende av laddningsdjupet är en ännu ej utredd fråga.

8. Förloppet vid en kompressibel beskrivning

Vi startar denna analys med ett färdigdetonerat sprängämne där detonationsfronten just nått fram till det omgivande vattnet. I detta läge finns all energi i form av rörelseenergi $E_{g,k}$ och inre energi $E_{g,i}$ hos reaktionsprodukterna. När stötvågen transmittas ut i vattnet sker en kraftig stötvågsupphettning av vattnet närmast gasklotet. Vattnet ges rörelseenergin $E_{v,k}$ samt den inre energin $E_{v,i}$, som är summan av upphettat vatten och kompressionsarbete. Under det fortsatta förloppet gäller hela tiden, i en lämpligt stor volym med radie R runt laddningen,

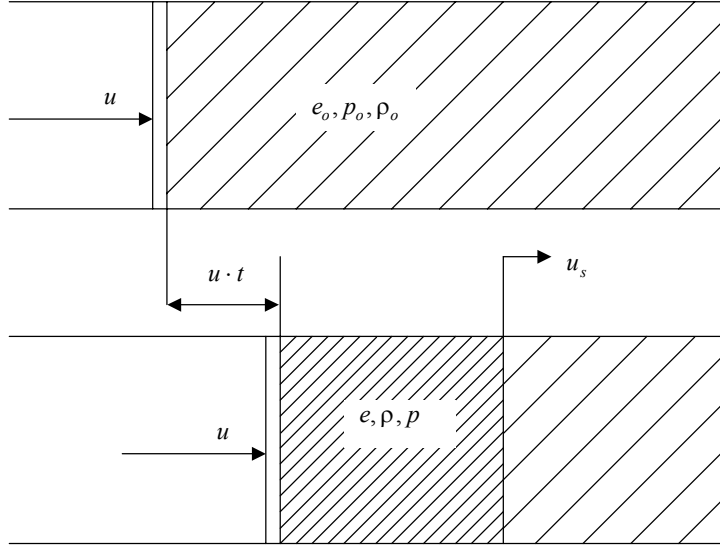
$$E_{tot} = E_{g,k} + E_{g,i} + E_{v,k} + E_{v,i}$$

där E_{tot} är den totala ursprungliga energin i systemet.

I startsituationen har vi ett gasklot med radien $r_{b,0}$ innehållande energin E_{reak} omgivet av ett tjockt vattenskal, som är komprimerat till trycket p_h . Vi utgår från en något större vattenvolym vid atmosfärstryck och vid temperaturen $T_0 = 298$ K och tätheten $\rho_{v,0} = 0.9982$ g/cm³ och komprimerar denna volym isentropt till önskat hydrostatiskt tryck p_h varvid radien minskar till R . Den totala startenergin är således

$$E_{tot} = E_{reak} + E_{0,inre}$$

där $E_{0,inre}$ är den isentropt tillförda energin till vattnet. När bubblan når sin maximala radie $r_{b,m}$ når stötvågen radien $R_{stöt,m}$, lika med R . Index "m" anger tillståndet vid maximal bubbelradie. I detta läget kan smärre rörelser fortfarande förekomma inne i gasen men dessa kan försummas dvs. gasen kan behandlas som stilla i detta ögonblick. Vattnet närmast utanför bubblan är därför också stillastående. Vi kan nu definiera att all rörelseenergi i vattnet är kopplad till stötvågen dvs. $E_{k,stöt} = E_{v,k,m}$. För att bestämma den inre energin i stötvågen studerar vi nu en plan driven stötvåg (tex. ref. 5), se figur 2



Figur 2. Plan stötvåg

Massans, impulsens och energins bevarande ger

$$\rho_0 u_s = \rho(u_s - u) \quad (13)$$

$$p - p_0 = \rho_0 u u_s \quad (14)$$

$$e - e_0 = \frac{1}{2}(v_0 - v)(p + p_0) \quad (15)$$

där u_s är stötvågshastigheten. Vi har från (13) $v_0 - v = \frac{u}{u_s} v_0$. Insatt i (15) erhålles med (14)

$$e_{i,stöt} = e - e_0 = \frac{1}{2} \frac{u}{u_s} v_0 (2p_0 + \rho_0 u u_s) = \frac{u^2}{2} + \frac{u}{u_s} v_0 p_0 \approx \frac{u^2}{2} = e_{k,stöt}$$

För en svag stöt har vi således $E_{i,stöt} \approx E_{k,stöt}$ vilket ger $E_{stöt} = E_{k,stöt} + E_{i,stöt} \approx 2E_{k,stöt}$.

Kvarvarande överskottsenergi i vattnet ges av

$$E_{v,rest} = E_{v,i,m} - E_{i,stöt} - E_{0,inre}$$

Denna energi är fördelad från bubbelranden $r_{b,m}$ ut till domänradien $R_{stöt,m}$. En viss del av denna energi utgörs av upphettat vatten, resten utgörs av komprimerat vatten. Energin hos det komprimerade vattnet kan uppskattas genom följande resonemang. Utgå från startläget med en bubbelradie på $r_{b,0}$ och omgivande vatten komprimerat till trycket p_h upp till domänradien $R_{stöt,m}$. Vi komprimerar nu denna volym isentropiskt upp till bubbelradien $r_{b,m}$. Vi erhåller

$$E_{komp,m} = \int_{V_{stöt} - V_{b,m}}^{V_{stöt} - V_{b,0}} p_s \left(\frac{V}{m_0} \right) dV$$

där

$$V_{stöt} = \frac{1}{3} R_{stöt}^3$$

$$V_{b,0} = \frac{1}{3} r_{b,0}^3$$

$$V_{b,m} = \frac{1}{3} r_{b,m}^3$$

m_0 = den totala vattenmassan

där p_s är det isentropa tryckberoendet erhållet från differentialekvationen

$$de_v = -p dv$$

$$p(v_0) = p_h$$

där

$$v = \frac{V}{m_0}$$

$$v_0 = \frac{V_{stöt} - V_{b,0}}{m_0}$$

Om $p_s(v)$ approximeras med

$$p = K \left(\frac{V_{stöt,0} - V_{b,0}}{V_{stöt} - V} - 1 \right)$$

där $V_{stöt,0}$ ges av $p_h = K \left(\frac{V_{stöt,0} - V_{b,0}}{V_{stöt} - V_{b,0}} - 1 \right)$ erhålles

$$E_{komp,m} = (V_{b,m} - V_{b,0}) \left(p_h + \frac{1}{2} K \frac{V_{b,m} - V_{b,0}}{V_{stöt} - V_{b,0}} + O \left(\left(\frac{V_{b,m} - V_{b,0}}{V_{stöt} - V_{b,0}} \right)^2 \right) \right)$$

Bubbelenergin, som är summan av gasenergin vid maximal bubbelradie och mekaniskt arbete i vattnet, kan således uppskattas till

$$E_{b,m} \approx E_{g,m} + (V_{b,m} - V_{b,0}) p_h$$

där $E_{g,m}$ är gasens totala energi vid vändläget.

Ett mer direkt sätt att erhålla det mekaniska arbetet, upplagrat i vattnet vid vändläget, är att isentropt expandera vattencellerna ner till ett lågt tryck $p_{\min}$ (tex. 0.1 bar) och utvunnet arbete summeras. Samma vattenceller i sina starttillstånd expanderas ner till samma tryck och utvunnet arbete summeras. Skillnaden ger $E_{komp,m}$. Från beräkningen erhåller vi också vattnets maximala rörelseenergi $E_{v,k,km}$ vid tidpunkten t_{km} , tillståndet betecknat ”km”. Vi kan sammanfatta relevanta energier enligt:

- A. Stötvågsenergin kan bestämmas.
- B. Maximala rörelseenergin i vattnet kan bestämmas.
- C. Bubbelenenergin kan bestämmas.

9. Förloppet vid en inkompressibel beskrivning

Vid en inkompressibel beskrivning av processen vid en undervattensdetonation kan ingen information om stötvågen och stötvågsupphettningen erhållas. Vid den senare fasen av expansionen kan emellertid den inkompressibla beskrivningen utnyttjas för att förkorta beräkningstiden. Detta behandlas i avsnitt 10. Vi skall här diskutera några principiella frågeställningar kopplade till den inkompressibla beskrivningen. Vi behandlar gasen som en masslös isentrop fluid vars tryckberoende $p_s(v)$ erhålles från differentialekvationen

$$\begin{aligned} de_g(v, p) &= -p dv \\ p(v_{s,0}) &= p_0 \end{aligned}$$

där p_0 är ett lämpligt valt starttryck för att beskriva den inkompressibla rörelsen i vattnet. Gasens totala energi ges nu av

$$E_g = m_g e_g(v, p_s(v))$$

För att bättre kontrollera energiflödet i systemet begränsar vi vattenvolymen med en radie R utanför vilken vi tänker oss en ideal gas, med konstant gamma och med det hydrostatiska trycket, i ett skal begränsat utåt av en stel sfärisk yta. När bubbelranden expanderar gäller att vattenhastigheten ges av

$$u = u_b \left(\frac{r_b}{r} \right)^2$$

där r_b = aktuell bubbelradie
 $u_b = \dot{r}_b$ = bubbelrandens hastighet

Den yttre vattenranden utför nu ett arbete på den omgivande ideala gasen

$$\Delta E_{skal} = \int_{V_{skal}-\Delta V_b}^{V_{skal}} p_h \left(\frac{V_{skal}}{V} \right)^\gamma dV = \frac{p_h V_{skal}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta V_b}{V_{skal}}} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \approx p_h \Delta V_b$$

där $\Delta V_b = V_b - V_{b,0}$

$$V_b = \frac{1}{3} r_b^3$$

$$V_{b,0} = \frac{1}{3} r_{b,0}^3$$

V_{skal} = startvolymen hos den ideala gasen. $V_{skal} \gg \Delta V_b$

Energiekvationen för systemet med två gasvolymmer med mellanliggande inkompressibla vatten ges nu av

$$E_{g,0} = E_g + E_{v,ink} + p_h(V_b - V_{b,0})$$

där rörelseenergin hos vattnet (räknat per rymdvinkel) ges av

$$E_{v,ink} = \int_{r_b}^{R'} \frac{1}{2} \rho_{v,0} u^2 r^2 dr = \frac{1}{2} \rho_{v,0} u_b^2 r_b^4 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{R'} \right)$$

där $R' = (R^3 + r_b^3 - r_{b,0}^3)^{1/3}$

Vid vändläget gäller

$$E_{g,0} = E_{g,m} + p_h(V_{b,m} - V_{b,0})$$

vilket kan jämföras med bubbelenergin uppskattad vid kompressibel beskrivning. Vid den inkompressibla beskrivningen är systemets totala energi hela tiden lika med bubbelenergin.

Vilken roll spelar det inkompressibla trycket? Tryckskillnaden mellan de omgivande gaserna driver det inkompressibla vattnet och en differentialekvation för r_b kan ställas upp. Härvid spelar trycket inne i vattnet ingen roll och ingen energi är heller associerad med trycket inne i vattnet. Med rändernas rörelse $r_b(t)$, $R'(t)$ kända och med kända yttre tryck erhålles tryckfördelningen inne i vattnet. Vi ser att det inkompressibla trycket inte spelar någon roll för systemets dynamik men återger likväl uppmätta tryck väl vid långsamma förlopp.

Vi kan sammanfatta relevanta energier enligt:

- A. Bubbelenergin bestäms av ansatt starttryck p_0 .
- B. Maximal rörelseenergi i vattnet kan bestämmas, givet p_0 .

10. Hur karakteriseras ett undervattenssprängämnes prestanda ?

Låt oss studera vilka effekter som en undervattensladdning kan ge upphov till och vilka energier som då utnyttjas:

- A. På längre avstånd mellan en laddning och ett sjömål gäller att den enda effekten som når fram är stötvågen. Stötvågsenergin $E_{stöt}$ är avgörande för verkan och den specifika stötvågsenergin $e_{stöt} = E_{stöt} / m_g$, där m_g är laddningens vikt per rymdvinkel, anger sprängämnets prestanda vad gäller stötverkan.

- B. På korta avstånd utnyttjas sprängämnets arbetsförmåga mer optimalt genom ”kolvverkan”. Härvid omvandlas stötvågsenergi och rörelseenergi hos vattnet till deformationsarbete. Relevant parameter är här $e_{arb,km} = (E_{v,k,km} + E_{i,stöt}) / m_g$.
- C. På ett mellanavstånd kan fartyget sättas i böjsvängning, ”whipping”. Härvid kan det förmodas att gasernas maximala arbetsförmåga är av betydelse. Relevant parameter är då $e_{arb,m} = p_h(V_{b,m} - V_{b,0}) / m_g$. I litteraturen används i stället bubbelenergin vilken även inkluderar den kvarvarande gasenergin, som inte kan utföra arbete,

$$e_{b,m} = (E_{g,m} + p_h(V_{b,m} - V_{b,0})) / m_g.$$

10.1. Beräkningsaspekter

Det är önskvärt att utföra beräkningen med kompressibla medier fram till det att gasklotet erhållit sin största storlek (se avsnitt 8). Om detta inte låter sig göras (alltför tidskrävande beräkning) utförs beräkningen fram till att vattnets rörelseenergi har nått sitt största värde. Från beräkningen erhålles gasens energi

$$E_{g,km} = E_{g,k,km} + E_{g,i,km}.$$

Vi bestämmer nu det skapade upplagrade arbetet $E_{komp,km}$ i vattnet. Alla vattenceller expanderas isentropiskt till ett lågt tryck p_{min} (tex. 0.1 bar) och utvunnet arbete summeras. Samma vattenceller i sina starttillstånd expanderas ner till samma tryck och utvunnet arbete summeras. Skillnaden ger $E_{komp,km}$. Av denna energi utgörs en del av inre energi i stötvågen och resten är upplagrad energi kopplad till bubblan. För att separera dessa energier försöker vi uppskatta den inre energin i stötvågen och följer härvid delvis utvärderingstekniken vid experimentell bestämning av stötvågsenergi, se avsnitt 12. Först bestäms stötvågsbredden $\Delta r_{stöt}$ genom att bestämma läget för den vattencell som har trycket p_{max} / e . Stötvågens längd uppskattas sedan till $5\Delta r_{stöt}$ och upplagrat arbete i detta intervall sätts till inre energin i stötvågen $E_{i,stöt}$. Upplagrad energi kopplad till bubblan ges nu av $E_{komp,km} - E_{i,stöt}$.

Stötvågsenergin uppskattas till

$$E_{stöt} = E_{i,stöt} + E_{k,stöt} \approx 2E_{i,stöt}$$

Bubbelenergin kan nu uppskattas till

$$E_{b,km} \approx E_{v,k,km} - E_{k,stöt} + E_{komp,km} - E_{i,stöt} + E_{g,km} = E_{v,k,km} + E_{komp,km} + E_{g,km} - E_{stöt}$$

där den maximala kinetiska energin i vattnet $E_{v,k,km}$ erhålles från beräkningen. Sprängämnets maximala arbetsförmåga vid ”km” erhålles till

$$E_{arb,km} \approx E_{v,k,km} + E_{i,stöt}$$

För att bestämma gasens maximala arbetsförmåga vid "m" bestämmer vi maximala bubbelradien. Vi antar att förloppet från tillståndet "km" är isentrop varför bubbelenergin är konstant vilket ger

$$E_{b,km} = E_{b,m} = m_g e_g(v_{b,m}, p_s(v_{b,m})) + p_h(V_{b,m} - V_{b,0}) \quad (16)$$

där $v_{b,m} = \frac{V_{b,m}}{m_g}$

Gasttrycket $p_s(v)$ erhålles från ekvationen

$$de_g(v, p) = -p dv$$

$$p(v_{km}) = p_{km}$$

Om energiekvationen approximeras med $e = \frac{vp}{\omega}$ erhålles $p_s(v) = p_{km} \left(\frac{v_{km}}{v} \right)^{\omega+1}$. Från (16) erhålles maximala bubbelradien och vi erhåller gasernas maximala arbetsförmåga vid "m" till

$$E_{arb,m} = p_h(V_{b,m} - V_{b,0})$$

10.2. Energiberäkningsmetodik

Vi skall här sammanfatta hur relevanta prestandaenergier beräknas vid de två fallen:

- A. Gasen och vattnet beskrivs som kompressibla fram till att bubblan nått sin största radie, fallet betecknas med index "m".
- B. Gasen och vattnet beskrivs som kompressibla fram till att vattnets rörelseenergi nått sitt största värde, fallet betecknas med index "km". Därefter beskrivs vattnet som inkompressibelt och gasen som isentrop men masslös.

Fallet A.

1. Vid tidpunkten för maximal bubbelradie avläses vattnets rörelseenergi vilket ger

$$E_{v,k,m} = E_{k,stöt}$$

Från approximationen $E_{i,stöt} \approx E_{k,stöt}$ erhålles

$$E_{stöt} \approx 2E_{k,stöt}.$$

2. Från den maximala bubbelradien erhålles

$$E_{arb,m} = p_h(V_{b,m} - V_{b,0})$$

Alternativt erhålles $E_{arb,m}$ genom att isentropt expandera vattencellerna samt summera alla energibidragen.

Med den kvarvarande gasenergin erhålles bubbelenergin

$$E_{b,m} = E_{arb,m} + E_{g,m}$$

3. Från den maximala rörelseenergin i vattnet erhålles maximala arbetsförmågan vid ”km” till

$$E_{arb,km} \approx E_{v,k,km} + E_{k,stöt}$$

Vi kan nu kontrollera om energiförlusterna till vattnet efter tidpunkten ”km” är konstant dvs. att bubbelenergin är konstant mellan ”km” och ”m”. Vi har uppskattningen

$$E_{b,km} = E_{v,k,km} + E_{komp,km} + E_{g,km} - E_{stöt}$$

Om $E_{b,km} \approx E_{b,m}$ är förloppet isentropt.

Fallet B

I detta fallet antar vi att förloppet är isentropt mellan tillstånden ”km” och ”m”.

1. Från beräkningen erhålles vattnets maximala rörelseenergi $E_{v,k,km}$. Upplagrat arbete $E_{komp,km}$ i vattnet vid tiden t_{km} beräknas. Inre energi i stötvågen $E_{i,stöt}$, som är del av $E_{komp,km}$, uppskattas. Vi erhåller

$$E_{stöt} \approx 2E_{i,stöt}$$

2. Maximala arbetsförmågan vid ”km” uppskattas till

$$E_{arb,km} \approx E_{v,k,km} + E_{i,stöt}$$

3. Bubbelenergin uppskattas till

$$E_{b,m} = E_{b,km} = E_{v,k,km} + E_{komp,km} + E_{g,km} - E_{stöt}$$

4. För bestämning av gasernas maximala arbetsförmåga vid ”m” modelleras vattnet som inkompressibelt mellan ”km” och ”m” varvid maximala bubbelradien erhålles, vilket ger

$$E_{arb,m} = p_h(V_{b,m} - V_{b,0})$$

11. Undervattensprestanda hos TNT

För TNT har vi valt

$$\rho_{s,0} = 1.63 \text{ g/cm}^3$$

$$q_{reak} = 4.78 \text{ MJ/kg}$$

samt parametrarna i JWL-ekvationen till

$$A = 4.54864 \text{ Mbar}$$

$$B = 0.10119 \text{ Mbar}$$

$$a = 4.5$$

$$b = 1.5$$

vilket ger detonationstillståndet

$$D = 6890 \text{ m/s}$$

$$p_{CJ} = 20.855 \text{ GPa}$$

$$u_{CJ} = 1855 \text{ m/s}$$

Vid beräkningarna valdes $r_{b,0} = 1 \text{ cm}$, se vidare avsnitt 6 vad gäller skalbarhet. Antalet celler i reaktionsblandningen (reaktionsblandningens starttillstånd ges av Taylorvågen, bestämning se avsnitt 3.3) valdes till 800, vilket ger en starttjocklek på 0.0125 mm per cell. När bubbelrandens radie ökat till 10 cm (om detta inträffar) ersätts gasen av en masslös isentrop fluid.

Successivt när stötvågen rör sig ut i vattnet läggs det till nya vattenceller, där tjockleken på de nya vattencellerna är 0.1 mm. På grund av strömningen minskar vattencellernas tjocklek till minimum 0.05 mm då omzoning, se avsnitt 5.6, ökar cellens storlek (den nyskapade cellens tjocklek är alltid mindre än 0.1 mm).

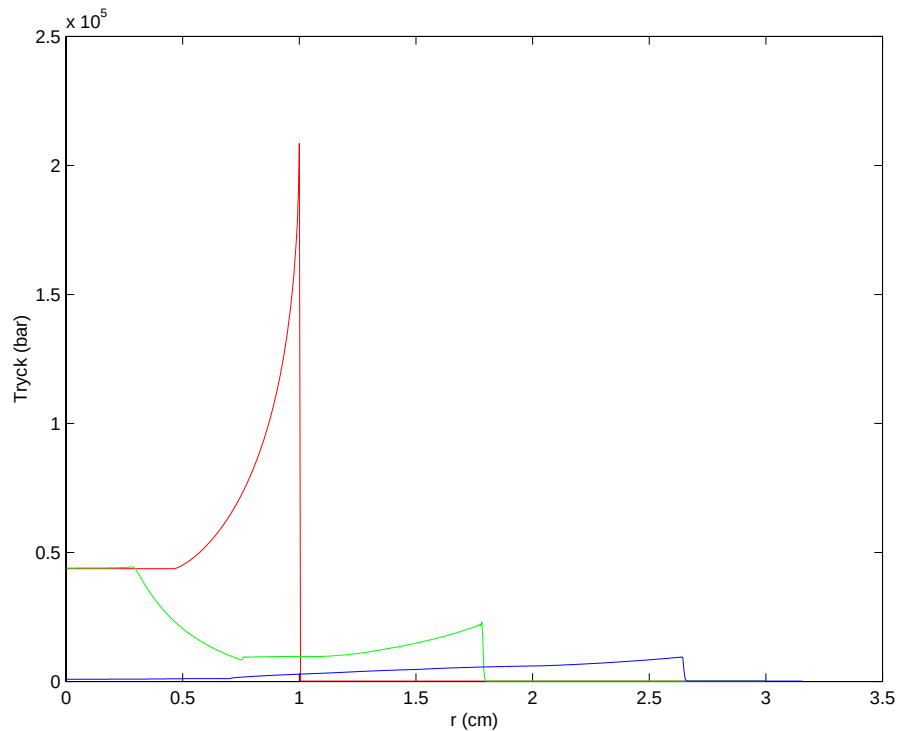
11.1. Prestanda vid laddningsdjupet 2000 m

Vi börjar med att studera detonationen på 2000 m djup då det vid detta hydrostatiska tryck är möjligt att relativt snabbt beräkna hela förloppet upp till maximal bubbelradie. Maximala bubbelradien blir $r_{b,m} = 4.81 \text{ cm}$ (alternativt laddningsradier) och stötvågsfronten har då nått till $R_{stöt,m} = 46 \text{ cm}$ vid tidpunkten $t_m = 329 \mu\text{s}$. Maximala antalet använda vattenceller bli ca

$$\frac{R_{stöt,m}}{\Delta r_{cell}} \approx 5000 \text{ och beräkningstiden ca. 1 dygn på en enprocessorsmaskin med}$$

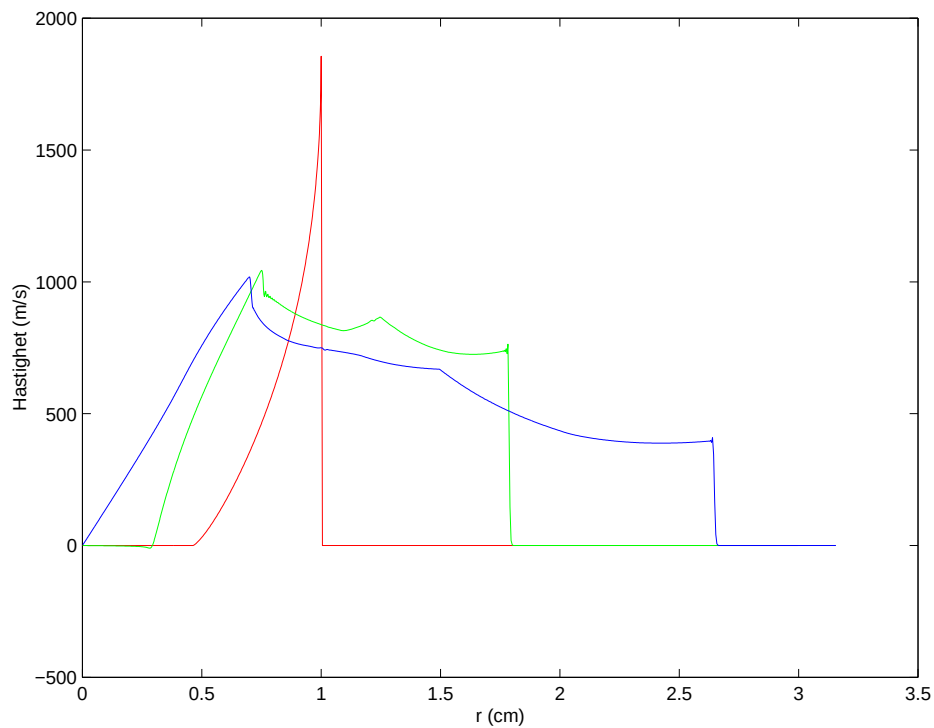
klockfrekvensen 450 MHz.

I figur 3 visas tryckfördelningen vid tidpunkterna 0 μs (starttillståndet = Taylorvågen), 2.1 μs och 5.4 μs då bubbelradien är respektive 1 cm, 1.25 cm och 1.5 cm.



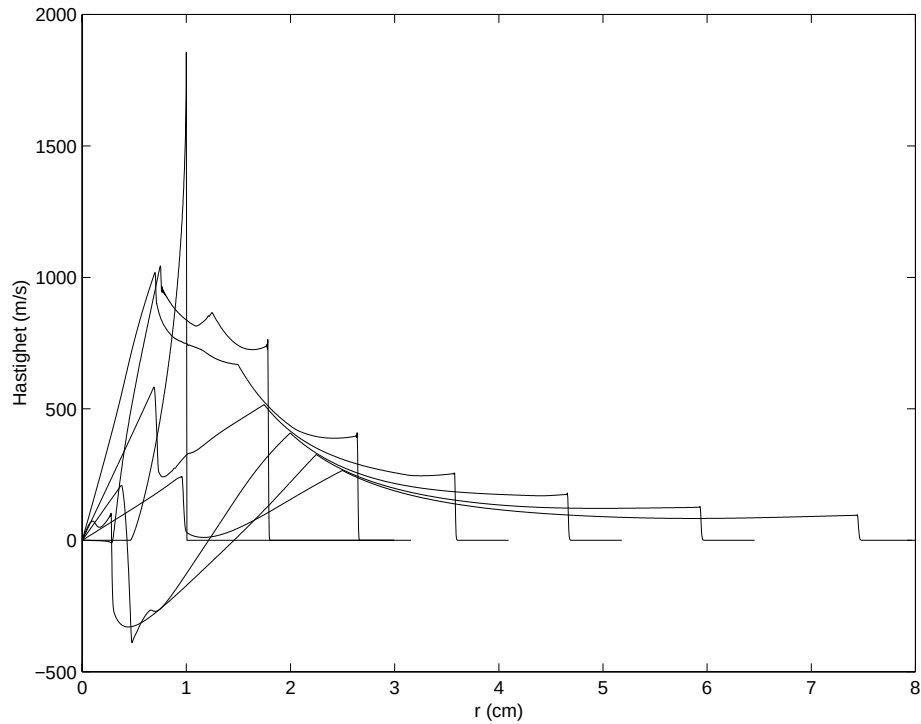
Figur 3. Tryckfördelningen vid tiderna $t = 0 \mu\text{s}$ (röd), $t = 2.1 \mu\text{s}$ (grön) och $t = 5.4 \mu\text{s}$ (blå), laddningsdjup 2000 m

Av figuren framgår Taylorvågens (relativt ofysikaliska) extrema topp, se avsnitt 3.3. Figuren visar också den snabba tryckavlastningen av reaktionsprodukterna. Figur 4 visar hastighetsfördelningen vid samma tidpunkter som tryckfördelningen i figur 3.



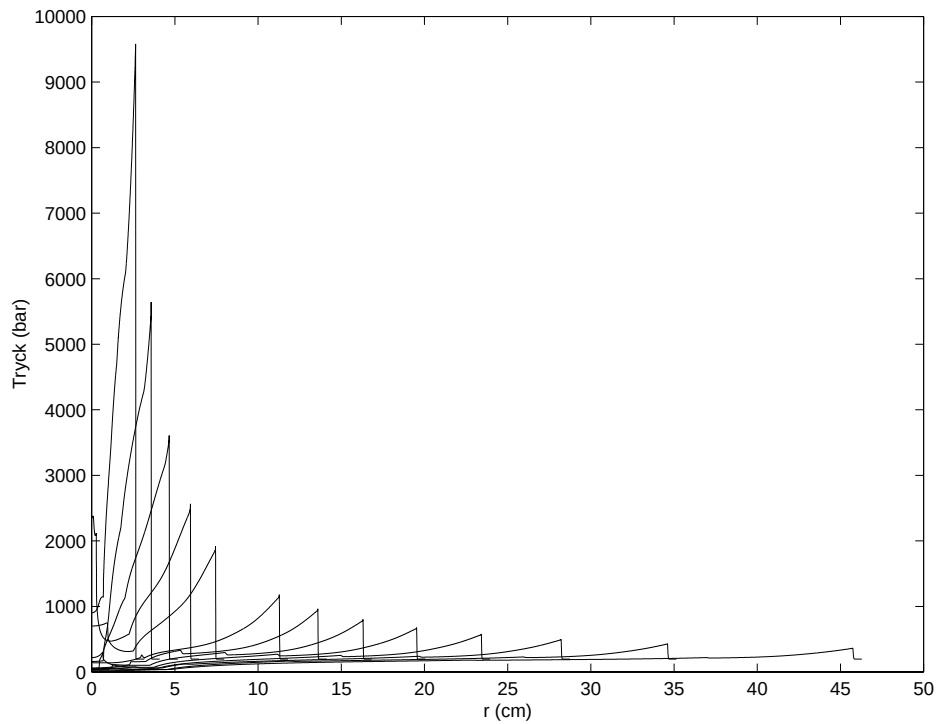
Figur 4. Hastighetsfördelningen vid tiderna $t = 0 \mu\text{s}$ (röd), $t = 2.1 \mu\text{s}$ (grön) och $t = 5.4 \mu\text{s}$ (blå), laddningsdjup 2000 m

Av figuren framgår att hastighetsderivatan är diskontinuerlig vid gränsytan mellan gas och vatten samt att vattenhastigheten är hög (>400 m/s) i intervallet bubbelrand stötvågsfront. Figur 5 visar hastighetsfördelningen upp till att bubbelradien nått 2.50 cm.



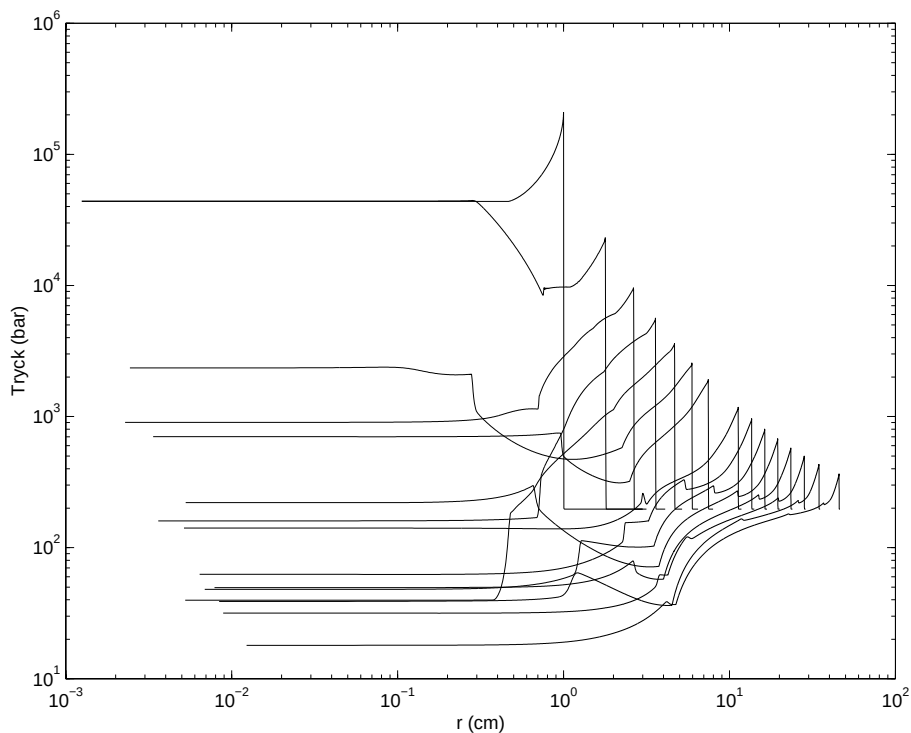
Figur 5. Hastighetsfördelningar i början av expansionen, laddningsdjup 2000 m.

Av figuren framgår att en svängning har uppstått i gasen där gasen reflekteras dels vid bubbelranden dels vid gasklotets centrum. Dessa svängningar leder till att tryckvågor successivt matas ut i vattnet. I figur 6 ges tryckfördelningen vid ett antal tidpunkter upp mot tiden t_m .



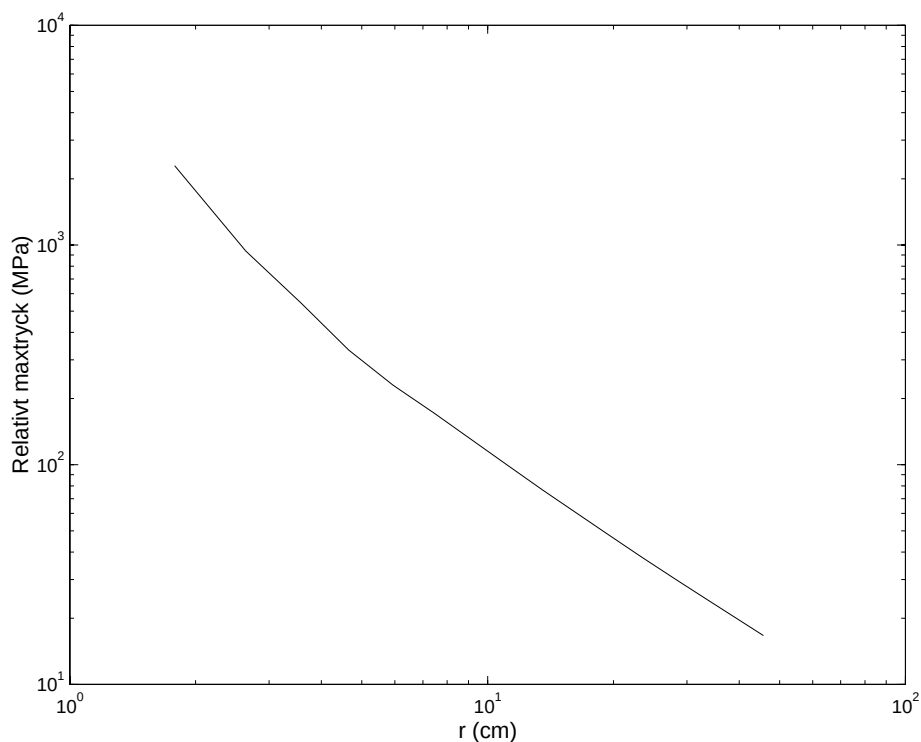
Figur 6. Tryckfördelningen vid ett antal tidpunkter, laddningsdjup 2000 m.

Av figuren framgår att stötvågstrycket på längre avstånd från bubblan, blir ett överlagrat tryck på det hydrostatiska trycket (ca 197 bar). För att erhålla en bättre visuell upplösning av tryckfördelningen har, i figur 7, tryckfördelningen återgetts i ett loglogdiagram.



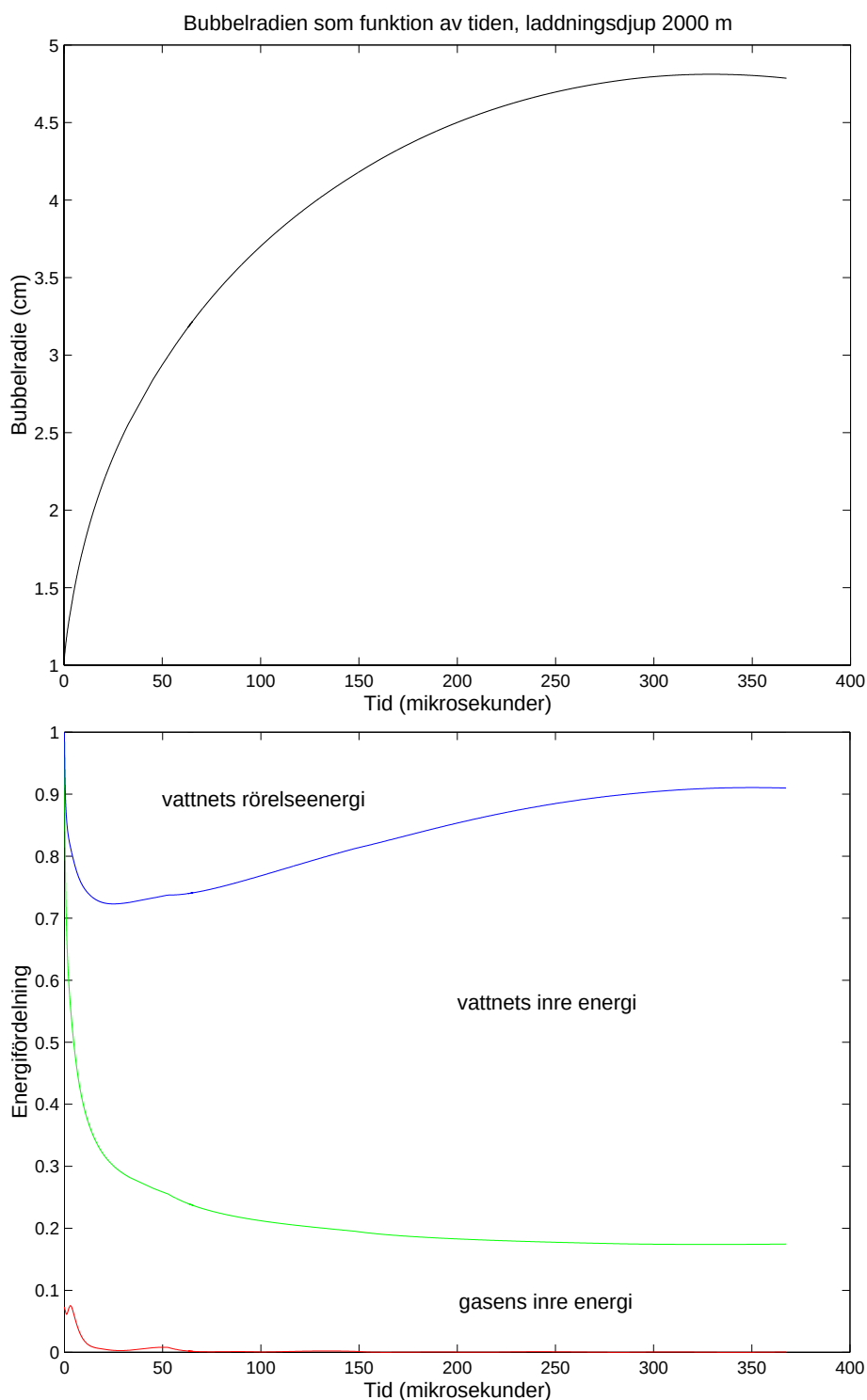
Figur 7. Tryckfördelningen i loglogskala, laddningsdjup 2000 m.

Av figuren framgår hur tryckpulser successivt matas ut i vattnet på grund av gasrörelsen och hur stötvågens maxtryck avtar med avståndet. I figur 8 ges det relativa (relativt det hydrostatiska trycket) maxtryckets beroende av avståndet till laddningscentrum



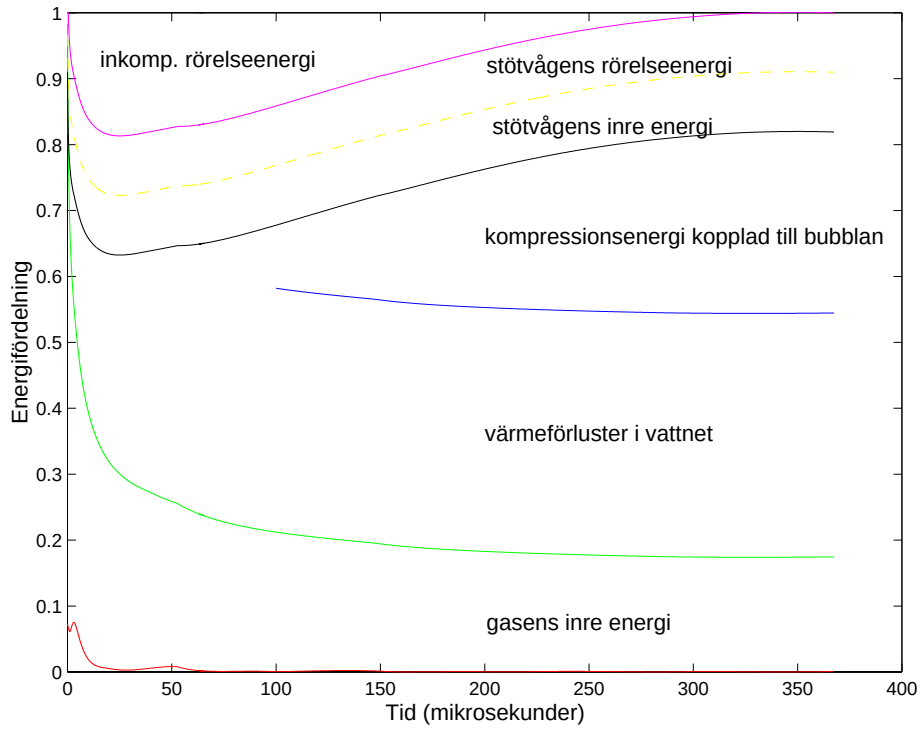
Figur 8. Relativa maxtryckets beroende av avståndet, laddningsdjup 2000 m.

I figur 9, övre delen, ges bubbelrandens rörelse som funktion av tiden. Maximal bubbelradie 4.81 cm inträffar vid tidpunkten $329 \mu s$. I figur 9, undre delen, ges energifördelningen mellan gasens rörelseenergi $e_{g,k}$, gasens inre energi $e_{g,i}$, vattnets rörelseenergi $e_{v,k}$ och vattnets inre energi $e_{v,i}$.



Figur 9. Bubbelradien som funktion av tiden, övre delen. Energifördelning vid laddningsdjupet 2000m, undre delen. I den nedre figurens nederkant visas gasens rörelseenergi vilken snabbt avtar till försumbara värden.

I avsnitt 8 och 10.2 har en metodik beskrivits hur relevanta prestandaenergier skall beräknas i det fallet att förloppet kan följas upp till maximala bubbelradien. I figur 10 visas de olika energiformernas variation med tiden.



Figur 10. Relevanta energier vid laddningsdjupet 2000 m.

Vi erhåller värdena

$$r_{b,km} = 2.3418 \text{ cm}$$

$$r_{b,m} = 4.8115 \text{ cm}$$

$$e_{v,k,m} = e_{k,stöt} = 0.45 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{stöt} = 2e_{v,k,m} = 0.90 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{arb,m} = p_h (V_{b,m} - V_{b,0}) / m_g = \left(\left(\frac{r_{b,m}}{r_{b,0}} \right)^3 - 1 \right) \frac{p_h}{\rho_{s,0}} = 1.33 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{g,i,m} = 0.83 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{b,m} = e_{arb,m} + e_{g,i,m} = 2.16 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{v,k,km} = 1.20 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{arb,km} = e_{v,k,km} + e_{v,k,m} = 1.65 \text{ MJ/kg}$$

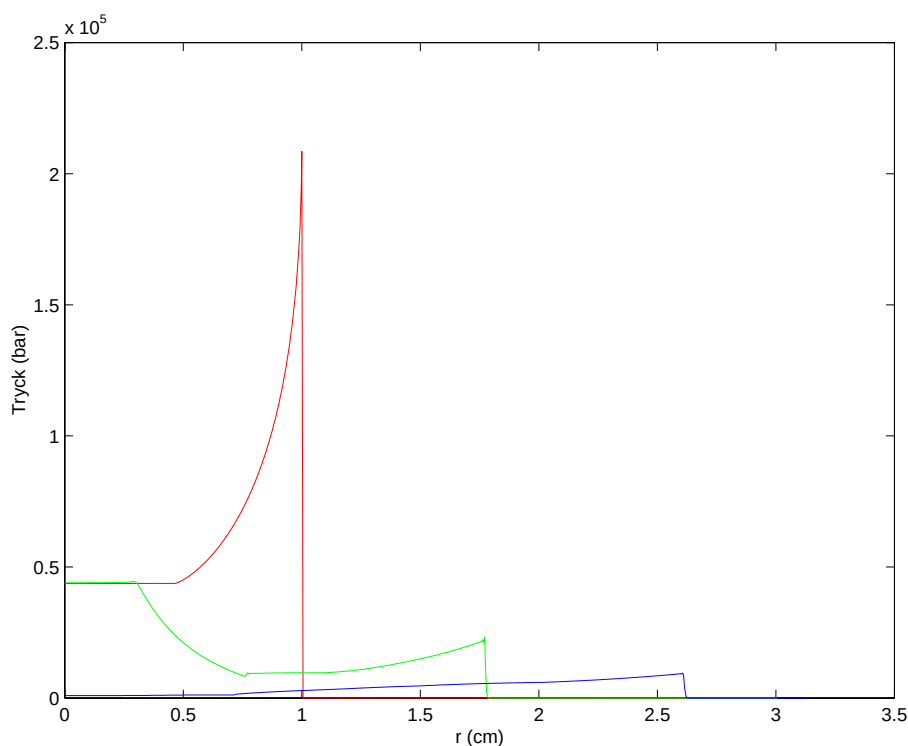
11.2. Prestanda vid laddningsdjupet 20 m

Vid detonation på 20 m djup har vi endast utfört beräkningen upp till tidpunkten för maximal rörelseenergi i vattnet, tillståndet ”km”. Vid denna tidpunkt är $r_{b,km} = 8.78 \text{ cm}$ och

$$R_{stöt,km} = 120 \text{ cm} . \text{ Antalet utnyttjade vattenceller är då ca. } \frac{R_{stöt,km}}{\Delta r_{cell}} \approx 12000 \text{ och}$$

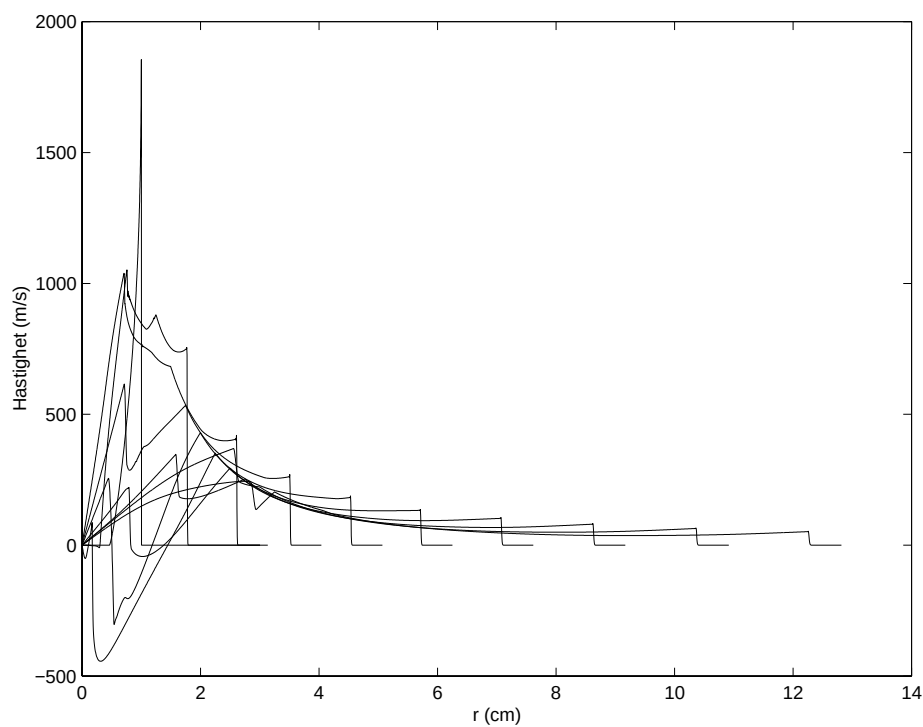
beräkningstiden är ca 3 dygn på en enprocessorsmaskin med klockfrekvensen 450 MHz. Fortsätts beräkningen under antagande att strömningen är inkompressibel erhålles $r_{b,m} = 21$ cm och $R_{stöt,m} = 1650$ cm. Vid en kompressibel beräkningen skulle det krävas

$\frac{R_{stöt,m}}{\Delta r_{cell}} \approx 165000$ vattenceller och en uppskattad beräkningstid på minst 50 dygn. Genom att parallellisera koden, vilket är enkelt, och utnyttja säg 10 processorer med klockfrekvensen 2 GHz kan beräkningstiden minskas till storleksordningen dygn. I figur 11 visas tryckförloppet motsvarande det i figur 3.



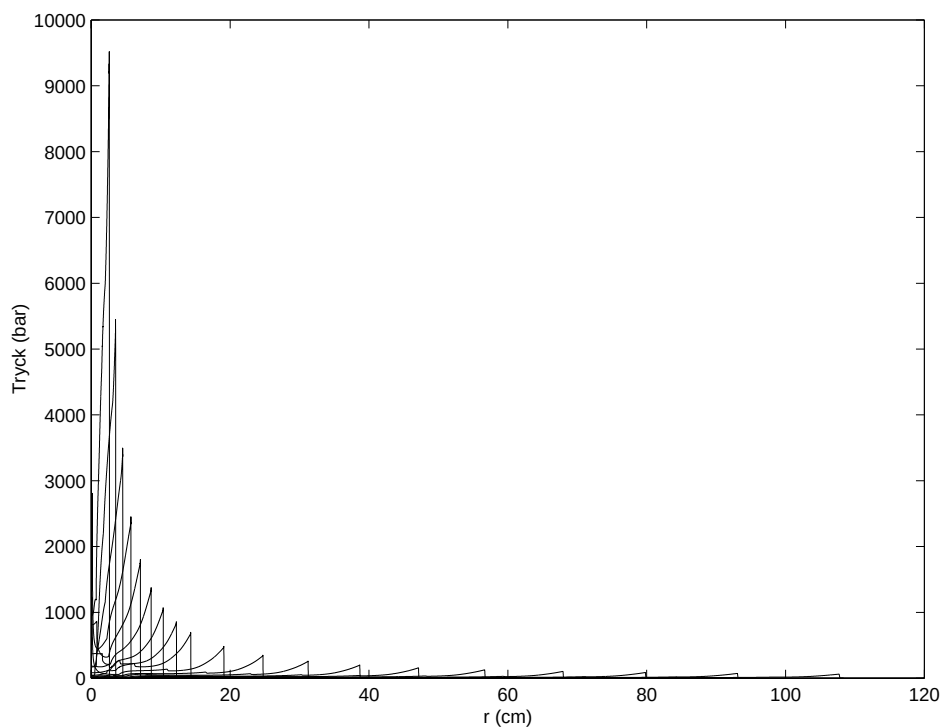
Figur 11. Tryckfördelningen vid tiderna $t = 0$ μ s (röd), $t = 2.1$ μ s (grön) och $t = 5.4$ μ s (blå), laddningsdjup 20 m.

Tidpunkterna och tryckfördelningarna avviker obetydligt från de vid laddningsdjupet 2000 m. Figur 12 visar hastighetsfördelningarna upp till bubbelradien 3.25 cm. Ur figuren framgår hur den inkompressibla hastighetsfördelningen ($u \propto 1/r^2$) byggs upp.



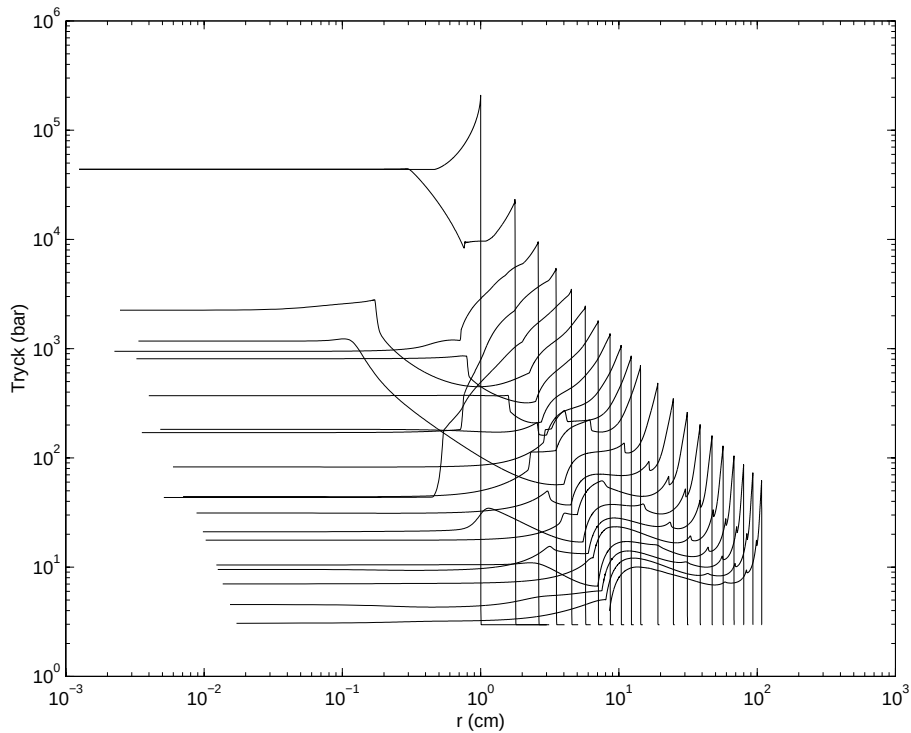
Figur 12. Hastighetsfördelningar upp till att bubbelradien är 3.25 cm, laddningsdjup 20 m.

Tryckfördelningar vid ett antal tidpunkter upp till att stötvågsfronten befinner sig på avståndet 110 cm visas i figur 13, vilken kan jämföras med figur 6.



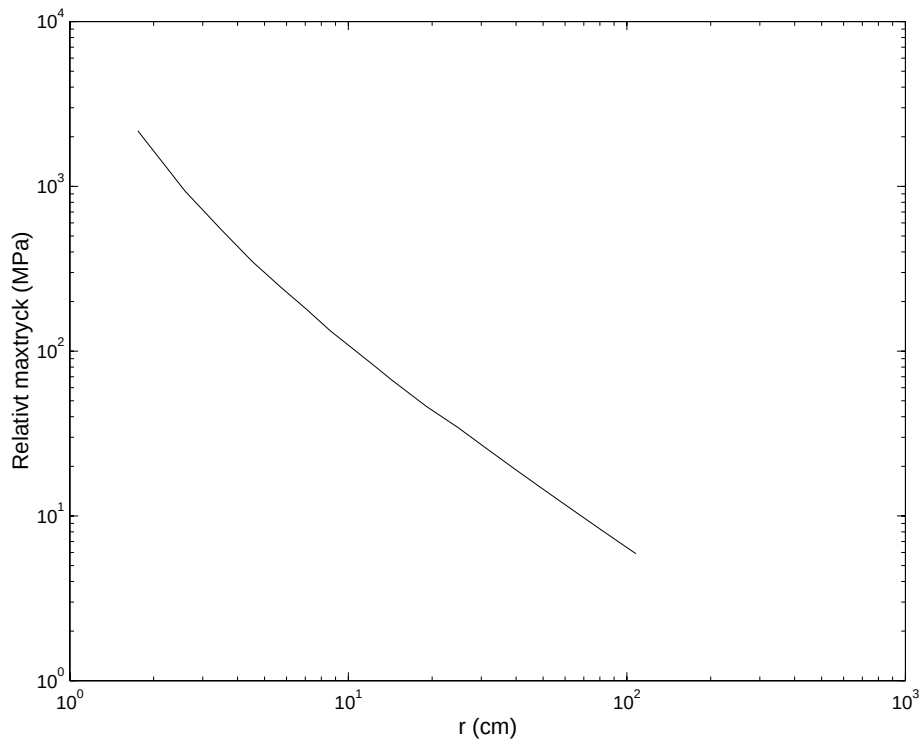
Figur 13. Tryckfördelningen upp till tidpunkten för maximal rörelseenergi i vattnet, laddningsdjup 20 m.

Figur 14 visar samma tryckfördelningar i ett loglogdiagram.



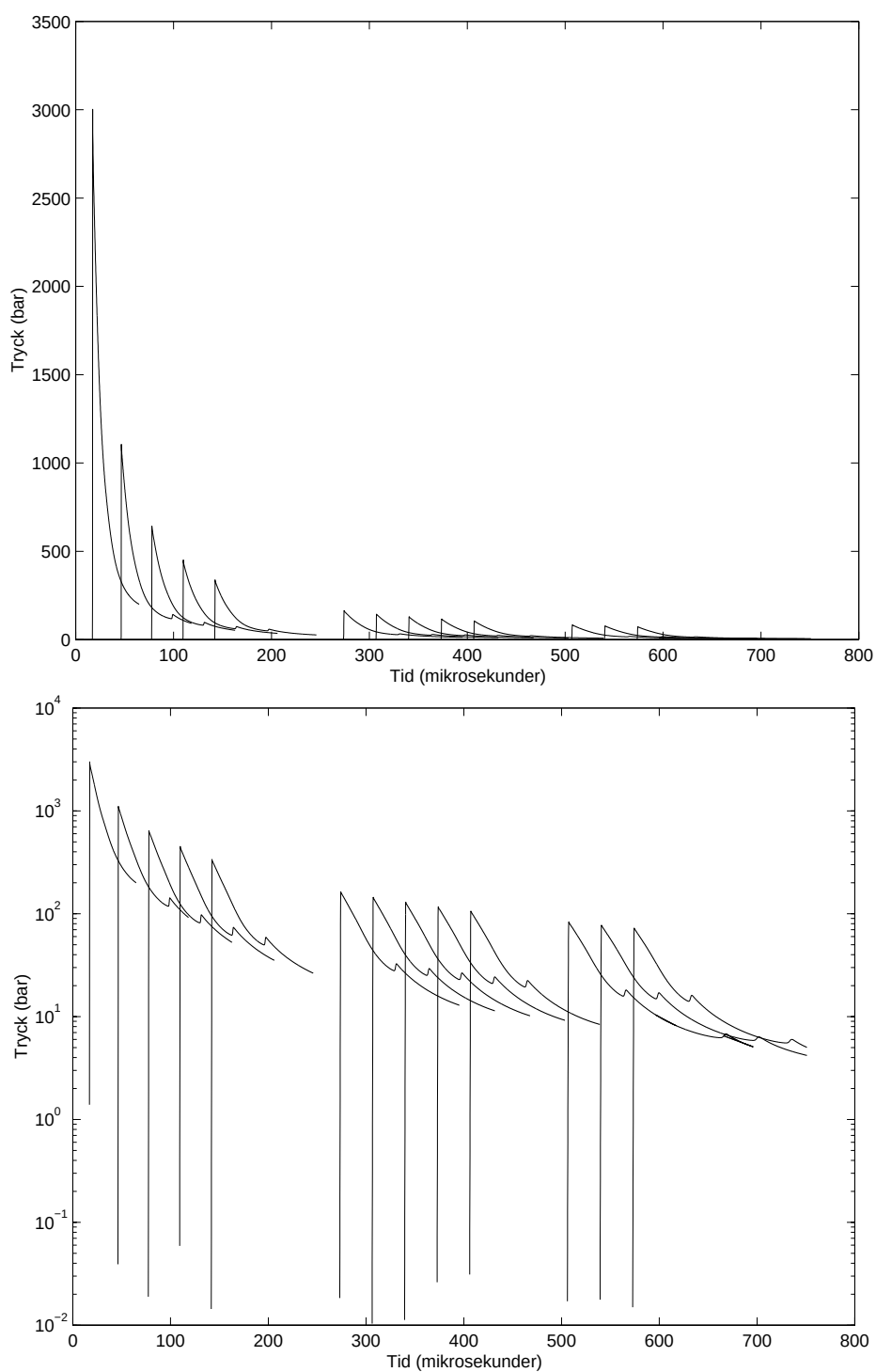
Figur 14. Tryckfördelningen upp till tidpunkten för maximal rörelseenergi i vattnet, laddningsdjup 20 m.

Även här ser vi de från gasrörelsen genererade vattenstötarna. Ur figuren framgår hur stötvågens maxtryck avtar med avståndet. I figur 15 ges relativa (relativt det hydrostatiska trycket) maxtryckets beroende av avståndet till laddningscentrum



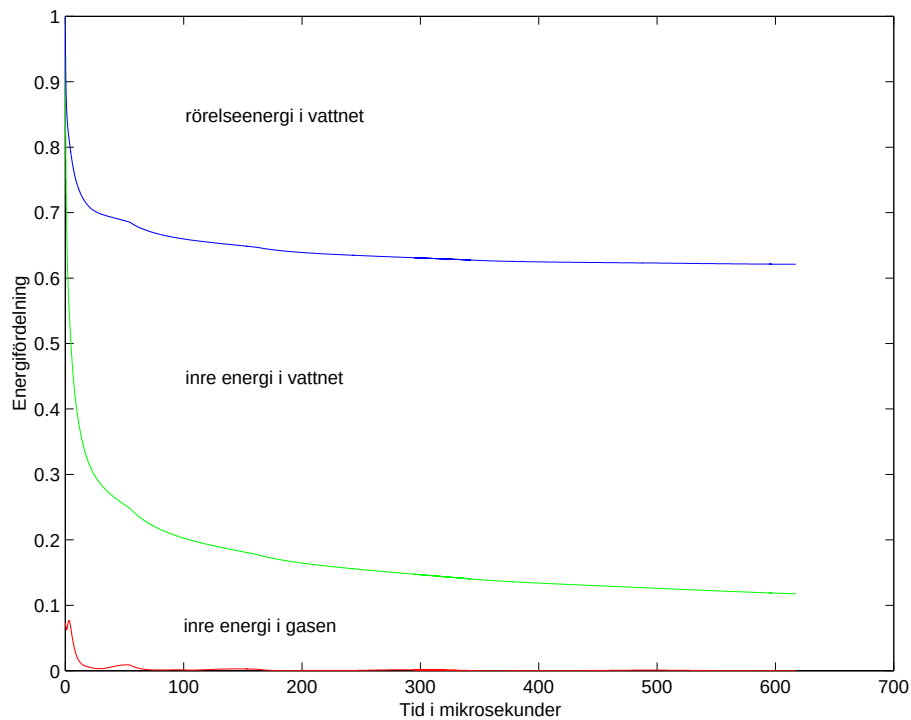
Figur 15. Relativa maxtryckets beroende av avståndet till laddningscentrum, laddningsdjup 20 m.

Figur 16 visar tryckförloppen vid ett antal avstånd från laddningscentrum. I figurens övre del ges förloppet i linjär tryckskala och i figurens nedre del i logaritmisk skala.



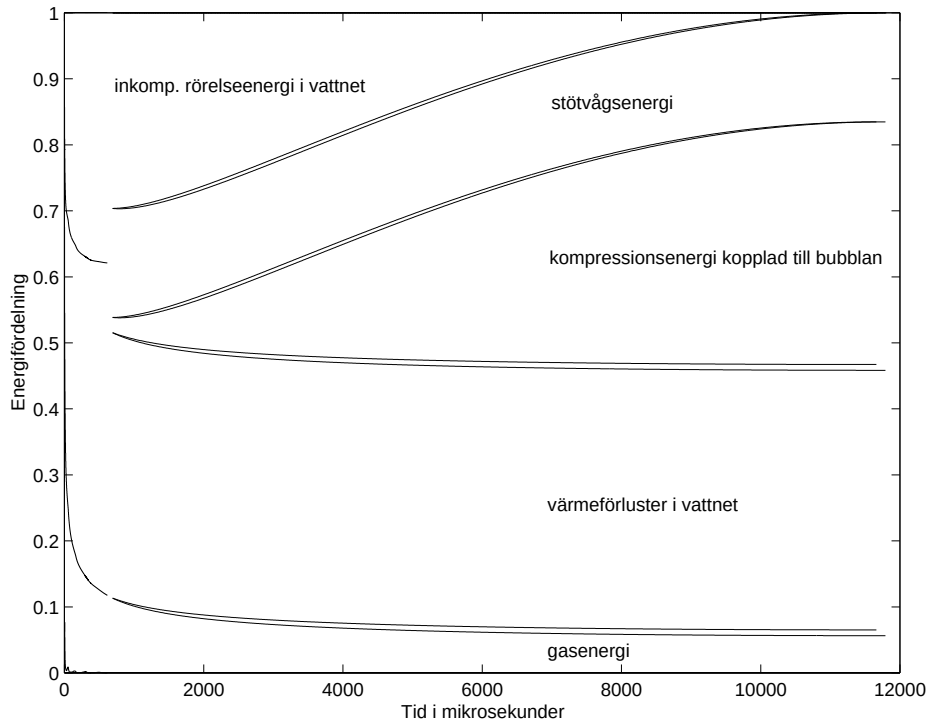
Figur 16. Tryckförloppet på olika avstånd från laddningen, laddningsdjupet 20 m.

I avsnitt 10.1 och 10.2 beskrivs en metodik för hur relevanta prestandaenergier beräknas då förloppet bestämts upp till tidpunkten t_{km} för maximal rörelseenergi i vattnet. Figur 17 visar energifördelningen upp till tidpunkten t_{km} . I figuren har relevanta energier markerats.



Figur 17. Energifördelningen vid laddningsdjupet 20 m upp till tiden för maximal rörelseenergi i vattnet.

Med startvärden från tillståndet ”km” kan en fortsättning beräknas med en inkompressibel modellering (beräkningarna utförda med $\omega = 0.20$ och $\omega = 0.25$). Beräknade energifördelningar upp till tidpunkten för maximal bubbelradie framgår av figur 18



Figur 18. Energifördelningen vid laddningsdjupet 20 m upp till tidpunkten för maximal bubbelradie.

Från beräkningarna erhålles

$$r_{b,km} = 8.78 \text{ cm}$$

$$r_{b,m} = 21.1 \text{ cm}$$

$$e_{i,stöt} = 0.41 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{stöt} = 2e_{i,stöt} = 0.82 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{v,k,km} = 1.82 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{g,i,km} = 0.56 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{b,km} = e_{b,m} = e_{v,k,km} + e_{komp,km} + e_{g,i,km} - e_{stöt} = 2.09 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{arb,km} = e_{v,k,km} + e_{k,stöt} = 2.23 \text{ MJ/kg}$$

$$e_{arb,m} = p_h (V_{b,m} - V_{b,0}) / m_g = \left(\left(\frac{r_{b,m}}{r_{b,0}} \right)^3 - 1 \right) \frac{p_h}{\rho_{s,0}} = 1.71 \text{ MJ/kg}$$

Observera att vi här ansatt $e_{b,km} = e_{b,m}$.

12. Experimentell bestämning av prestanda för undervattenssprängämnen

Det är svårt att absolutbestämma stötvågsenergi $e_{stöt}$, bubbelenergi $e_{b,m}$ och maximal arbetsförmåga vid maximal bubbelradie $e_{arb,m}$. I avsnitt 12.1 diskuteras bestämning av stötvågsenergi och i avsnitt 12.2 bestämning av arbetsförmåga och bubbelenergi.

12.1. Experimentell bestämning av stötvågsenergi

För att bestämma stötvågsenergin registreras tryckförloppet på ett antal avstånd från laddningscentrum. Låt oss först studera det väsenligt enklare fallet att bestämma stötvågsenergin hos en plan stötvåg med begränsad utbredning. Här bestämmer vi stötvågsenergin per ytenhet. Låt det uppmätta övertrycket (trycket relativt det hydrostatiska trycket) vara $p(t)$ och den med trycket associerade partikelhastigheten vara $u(t)$. Stötvågsenergin per ytenhet ges nu av

$$e_{yt,stöt} = \int_0^{(\infty)} pu \, dt$$

För en plan stöt gäller

$$p = \rho_0 u u_s$$

där

$$\rho_0 = \text{vattnets täthet}$$

$$u_s = \text{stötvågshastigheten}$$

Approximativt gäller (materialrelation) $u_s = c + au$, där c är vattnets ljudhastighet vid låga tryck. Detta ger oss

$$e_{yt,stöt} = \frac{2}{\rho_0 c} \int_0^{(\infty)} \frac{p^2}{1 + \sqrt{1 + 4a \frac{p}{\rho_0 c^2}}} \, dt$$

Vid en undervattensdetonation har vi en sfäriskt utgående stötvåg där vi inte kan separera den kompressibla delen (stötvågen) från den inkompressibla delen annat än approximativt. Specifika stötvågsenergin uppskattas enligt

$$e_{stöt} = \left(\frac{4\pi r_{mät}^2}{Q} \right) \frac{2}{\rho_0 c} \int_0^{t_{stöt}} \frac{p^2}{1 + \sqrt{1 + 4a \frac{p}{\rho_0 c^2}}} \, dt$$

där $t_{stöt}$ inte får vara för liten, underskattning, och inte för stor, överskattning. $r_{mät}$ är avståndet mellan mätpunkt och laddningscentrum och Q är laddningsvikten (OBS $Q = 4\pi m_g$). I litteraturen, se ref. 14, används, relativt godtyckligt $t_{stöt} = 5\Theta$, där Θ är stötens varaktighet definierad som tiden till att trycket har avtagit till p_{max}/e . Ett alternativt

sätt att bestämma stötvågsenergin är att utnyttja tryckmätningarna till att kalibrera spränggasernas energiekvation och därefter beräkna stötvågsenergin enligt avsnitt 10.2.

12.2. Experimentell bestämning av arbetsförmåga och bubbelenergi

Med hjälp av en ekolodsprincip kan bubblans maximala radie $r_{b,m}$ bestämmas. Härur erhålles direkt arbetsförmågan $e_{arb,m}$

$$e_{arb,m} = p_h (V_{b,m} - V_{b,0}) / m_g$$

För att bestämma bubbelenergin måste resterande gasenergi $e_{g,i,m}$ bestämmas. Vi beskriver nu vattnet som inkompressibelt. Gasen beskrivs med ett konstant gamma. Ansätt starttrycket till p_0 . Vi erhåller energisambandet

$$\frac{p_0 V_{b,0}}{\gamma - 1} = p_h (V_{b,m} - V_{b,0}) + \frac{p_m V_{b,m}}{\gamma - 1}$$

där

$$p_m = p_0 \left(\frac{V_{b,0}}{V_{b,m}} \right)^\gamma$$

Detta ger

$$p_0 = (\gamma - 1) p_h \frac{\frac{V_{b,m}}{V_{b,0}} - 1}{1 - \left(\frac{V_{b,0}}{V_{b,m}} \right)^{\gamma-1}}$$

För att kunna bestämma γ görs en bestämning av bubbelexpansionstiden t_m (praktiskt mäts bubbelkollapstiden som är $2t_m$). Med hjälp av differentialekvationen i avsnitt 9 kan γ anpassas så rätt expansionstid erhålles. Bubbelenergin erhålles nu till

$$e_{b,m} = \left(1 - \left(\frac{V_{b,0}}{V_{b,m}} \right)^{\gamma-1} \right)^{-1} p_h (V_{b,m} - V_{b,0}) / m_g$$

Osäkerheten med ovanstående härledning ligger i att förloppet, åtminstone i den inledande fasen, kraftigt avviker från inkompressibla förhållanden.

Att bestämma maximala bubbelradien är en relativt komplicerad mätning. Ofta bestäms endast bubbelexpansionstiden t_m . I detta fallet måste vi uppskatta γ varefter vi anpassar p_0 så att rätt expansionstid erhålles från differentialekvationen i avsnitt 9.

Vid studiet av nya sprängämnen utnyttjas ofta TNT (alternativt sprängdeg) som referenssprängämne. Om ett sprängämne med laddningsvikten Q ger bubbelexpansionstiden

t_m och laddningsvikten Q_{TNT} av TNT ger samma expansionstid erhålles specifika bubbelenergin enligt

$$e_{b,m} = \frac{Q_{TNT}}{Q} e_{b,m,TNT}$$

där specifika bubbelenergin för TNT sätts till 2 MJ/kg.

13. Sammanfattning och diskussion

Beräkningar har utförts för TNT detonerande på djupen 20 m och 2000 m. Resultatet vad gäller relevanta energier framgår av tabell 1.

Tabell 1. Sprängämnesprestanda för TNT vid laddningsdjupet 20 m och 2000 m

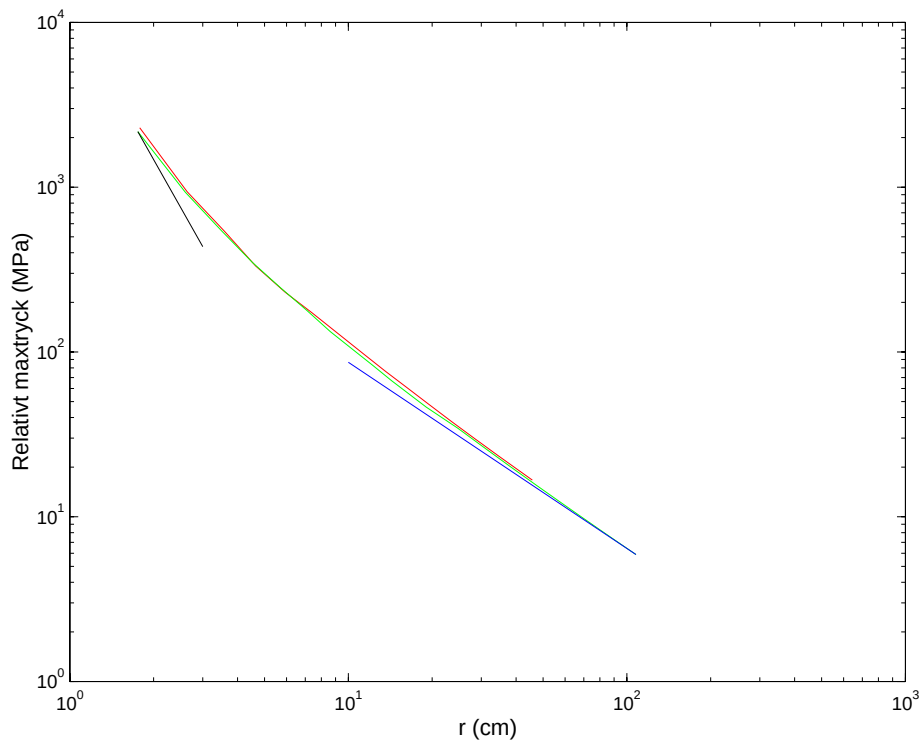
Typ	Laddningsdjup (m)	$e_{stöt}$ MJ/kg	$e_{b,m}$ MJ/kg	$e_{arb,km}$ MJ/kg	$e_{arb,m}$ MJ/kg
Beräkning	2000	0.90	2.16	1.65	1.33
Beräkning	20	0.82	2.09	2.23	1.71
Experiment	20	1.0	2.0		1.75

Tabellen ger en uppfattning om sprängämnesprestandas beroende av laddningsdjupet. När det gäller verifiering mot experimentella data finns sådana endast för laddningsdjupet 20 m, ref. 14. Det som styr beräkningsresultatet är i första hand beskrivningen av sprängämnet och dess omvandling. Genom brinnstudier bestäms sprängämnets ickeideala beteende. En viktig del därav är att bestämma reaktionsprodukternas tillståndsekvation (energiekvation).

Experimentellt bestäms denna av ett cylinderexpansionsförsök som ger gasernas/reaktionsprodukternas arbetsförmåga upp till en expansion av ca 8 ggr. dess ursprungsvolym. För att erhålla arbetsförmågan vid större expansion utförs lämpligen undervattensförsök med sfäriska laddningar där expansionen upp till ca 10000 ggr. kan följas. Standardmässigt registreras endast trycket på relativt stora avstånd från laddningscentrum, där närmaste givaren är typiskt 20 laddningsradier från centrum. Inom projektet ”Precisionsbekämpning” avses mätningar utföras nära bubbelranden där stötvågshastigheten bestäms samt tryckförloppet registreras med engångsgivare. En storhet som relativt noggrant låter sig registreras är stötvågens maxtryck.. Från experimentella data (se ref. 14) gäller för TNT i tryckintervaller 3.4 MPa till 138 MPa att maxtrycket avtar som

$$p_{\max} = p_{ref} \left(\frac{r_{ref}}{r} \right)^{1.13}$$

Detta samband har lagts in i figur 19 tillsammans med beräknade värden från avsnitt 11.1 och 11.2. För en stark vattenstöt gäller, se ref. 15, att maxtrycket approximativt är proportionellt mot $1/r^3$. Detta samband har också lagts in i figur 19.



Figur 19. Relativa maxtryckets beroende av avståndet till laddningscentrum: laddningsdjup 2000 m (röd), laddningsdjupet 20 m (grön), approximativt beroende för stark stöt (svart) och experimentella data för laddningsdjupet 20 m (blå)

Överensstämmelsen är relativt god (ca. 10% avvikelse) mellan teoretiska och experimentella data. Emellertid gäller att genom att justera parametrarna i spränggasernas JWL-ekvation, eller tillföra nya parametrar i tillståndsekvationen, kan noggrann överensstämmelse erhållas mellan experimentella och teoretiska värden.

I avsnitt 10 har ett antal prestandaparametrars koppling till olika verkansformer diskuterats. Med dagens datorer och beräkningsprogram är det numera möjligt att systematiskt studera betydelsen av stötvågsenergi, maximal rörelseenergi i vattnet, bubbelenergi, osv. vad gäller olika verkansformer vid olika farkoster. Detta avses utföras inom projektet "Precisionsbekämpning" under 2003.

Referenser

1. W.A. Walker och H.M. Sternberg, "The Chapman-Jouguet isentrope and the underwater shockwave performance of pentolite", Proceedings of the Fourth Symposium on Detonation (U.S. Government Printing Office, Washington, D.D., 1965), p. 27.
2. H.M. Sternberg och W.A. Walker, "Calculated flow and energy distribution following underwater detonation of a pentolite sphere", Phys. Fluids **14**, 1869 (1971).
3. B. Hellgren, "Program för beräkning av det hydrodynamiska förloppet vid detonation av en sfärisk laddning i vatten", FOA 1 Rapport A 1457-41, 1968.

4. E.F. Laurence, *Cheetah 1.39 User's Manual*, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA 94550, UCRL-MA-117541 Rev. 3, 1996.
5. Y.B. Zeldovich och Y.P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vols. 1, 2, Academic. New York 1966, 1967.
6. H.J. Pasman, "Shell premature by compression ignition and their laboratory simulation", CRDV rapport 707/75, April 1975.
7. J.H. Keenan, F.G. Keyes, P.G. Hill och J.G. Moore, *Steam Tables*, Wiley, New York, 1969.
8. J.O. Hallquist, "DYNA2D – An explicit finite element and finite difference code for axisymmetric and plane strain calculations (User's Guide)", University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCRL-52429, March 1978.
9. G.A. Gurtman, J.W. Kirsch och C.R. Hastings, "Analytical equation of state for water compressed to 300 kbar", J. Appl. Phys. **42**, 851 (1972).
10. *Ingenjörshandboken/Tekniska grundvetenskaper*, Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1959.
11. W.F. Noh, "Numerical methods in hydrodynamic calculations", University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCRL-52112, 1976.
12. R.H. Cole, *Underwater explosions*, Princeton University Press, New Jersey, 1948.
13. B.M. Dobratz och P.C. Crawford, LLNL Explosives Handbook, Properties of Chemical Explosives and Explosive Stimulants, Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-52997, 1985.
14. M.M. Swisdak, "Explosion effects and properties: Part II – Explosion effects in water", NSWC/WOL TR 76-116, 1978.
15. R. Courant och K.O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publishers, New York, 1948.

Energiekvation, tillståndsekvation och entropiekvation då Gruneisen-gamma endast beror av tätheten

1A. Inledning

Gruneisen-gamma definieras av

$$\Gamma(e, v) = v \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_v \quad (\text{A1})$$

där v är specifika volymen, p är trycket och e är specifika inre energien (energi per massenhet). Vi skall i detta appendix studera fallet att Gruneisen-gamma endast beror av tätheten. I avsnitt 2A ges systemets tillståndsekvation $p = p(v, T)$. I avsnitt 3A ges systemets entropiekvation $s = s(v, T)$.

Direkt uppintegration av (A1) ger energiekvationen då $\Gamma = \Gamma(v)$

$$p = g(v)e + f(v) \quad (\text{A2})$$

där
$$g(v) = \frac{\Gamma(v)}{v}.$$

Energien vid referenstillståndet (v_0, p_0) ges av

$$e_0 = \frac{1}{g(v_0)}(p_0 - f(v_0)).$$

2A. Tillståndsekvationen

För att erhålla tillståndsekvationen $p = p(v, T)$ beräknas först energiekvationen $e = e(v, T)$. Härvid utnyttjas att specifika värmets vid konstant volym v_0 är känt

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{v_0} = c(v_0, T) = c_0(T). \quad (\text{A3})$$

Allmänt gäller

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = c(v, T), \quad (\text{A4})$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p. \quad (\text{A5})$$

Från (A4) erhålles

$$e = \int_{T_0}^T c(v, T') dT' + h(v) \quad (\text{A6})$$

varur erhålles

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial c}{\partial v} \right)_{T'} dT' + \frac{dh}{dv} . \quad (\text{A7})$$

Med (A6) insatt i (A2) erhålles

$$p = g(v) \left(\int_{T_0}^T c dT' + h(v) \right) + f(v) . \quad (\text{A8})$$

Från (A8) erhålles

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p = gTc - g \int_{T_0}^T c dT' - gh - f . \quad (\text{A9})$$

Ekvation (A5) ger med (A7) och (A9)

$$\int_{T_0}^T \frac{\partial c}{\partial v} dT' + \frac{dh}{dv} = gTc - g \int_{T_0}^T c dT' - gh - f . \quad (\text{A10})$$

Ekvation (A10) ger två ekvationer

$$\int_{T_0}^T \frac{\partial c}{\partial v} dT' = g(Tc(v, T) - T_0 c(v, T_0)) - g \int_{T_0}^T c dT' , \quad (\text{A11})$$

$$\frac{dh}{dv} = -gh - f + gT_0 c(v, T_0) . \quad (\text{A12})$$

Ekvation (A11) deriveras med avseende på T vilket ger

$$\frac{\partial c}{g \partial v} = \frac{T \partial c}{\partial T} . \quad (\text{A13})$$

Inför nya variabler enligt

$$dx = g dv \rightarrow x = \int^v g dv' ,$$

$$dy = \frac{1}{T} dT \rightarrow y = \log(T)$$

vilket ger

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y}$$

med allmän lösning $c = F(x + y)$ eller

$$c = c_0(T k(v)) \quad (\text{A14})$$

där

$$k(v) = \exp\left(\int_{v_0}^v g(v') dv'\right)$$

och $c_0(x)$ är den kända funktionen från (A3). Ekvation (A12) kan nu skrivas

$$\exp\left(-\int_{v_0}^v g dv'\right) \frac{d}{dv} \left(\exp\left(\int_{v_0}^v g dv'\right) h \right) = -f + g T_0 c_0(T_0 k).$$

Från (A6) erhålles villkoret

$$h(v_0) = e_0$$

och vi erhåller lösningen

$$h = -\int_{v_0}^v \frac{k(v')}{k(v)} f(v') dv' + T_0 \int_{v_0}^v \frac{k(v')}{k(v)} g(v') c_0(T_0 k(v')) dv' + e_0 \frac{1}{k(v)}.$$

Energiekvationen kan nu skrivas

$$e = e_0 \frac{1}{k(v)} + \int_{T_0}^T c_0(T' k(v)) dT' - \int_{v_0}^v \frac{k(v')}{k(v)} (f(v') - g(v') c_0(T_0 k(v'))) T_0 dv'. \quad (\text{A15})$$

Sätt $T k(v) = x$ i den första integralen i (A15) vilket ger $dT = \frac{1}{k(v)} dx$. Sätt $T_0 k(v) = x$ i den andra integralen i (A15) vilket ger $T_0 g(v) k(v) dv = dx$. Insatt i (A15) erhålles

$$e = \frac{1}{k(v)} \left(e_0 + \int_{T_0}^{T k(v)} c_0(x) dx - \int_{v_0}^v k(v') f(v') dv' \right). \quad (\text{A16})$$

Från energiekvationerna (A2) och (A16) erhålles tillståndsekvationen

$$p = \frac{g(v)}{k(v)} \int_{T_0}^{T k(v)} c_0(x) dx + f(v) + \frac{g(v)}{k(v)} \left(e_0 - \int_{v_0}^v k(v') f(v') dv' \right). \quad (\text{A17})$$

3A. Entropiekvationen

För entropien gäller

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{c(v, T)}{T}, \quad (\text{A18})$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v. \quad (\text{A19})$$

Från (A8) erhålles

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = g(v) c(v, T).$$

Från (A14) har vi $c(v, T) = c_0(T k(v))$ där $k(v) = \exp \left(\int_{v_0}^v g dv' \right)$. Från (A18) erhålles

$$s = \int_{T_0}^T \frac{c_0(T' k(v))}{T'} dT' + q(v).$$

Sätt $T k(v) = x$ erhålles

$$s = \int_{T_0 k(v)}^{T k(v)} \frac{c_0(x)}{x} dx + q(v). \quad (\text{A20})$$

Derivera (A20) med avseende på v och sätt in i (A19) erhålles

$$\frac{dq}{dv} = -g c_0(T_0 k(v)).$$

Med kravet $q(v_0) = s_0$. Uppintegrerat erhålles

$$q = s_0 + \int_{T_0}^{T_0 k(v)} \frac{c_0(x)}{x} dx$$

vilket ger

$$s = s_0 + \int_{T_0}^{T_k(v)} \frac{c_0(x)}{x} dx. \quad (\text{A21})$$

Isentropen genom punkten (v^*, T^*) ges av ekvationen

$$T k(v) = T^* k(v^*). \quad (\text{A22})$$

Insättes (A22) i (A17) erhålles isentropen genom (v^*, p^*)

$$p = \frac{g(v)}{k(v)} \int_{T_0}^{T^* k(v^*)} c_0(x) dx + f(v) + \frac{g(v)}{k(v)} \left(e_0 - \int_{v_0}^v k(v') f(v') dv' \right) \quad (\text{A23})$$

där

$$p^* = \frac{g(v^*)}{k(v^*)} \int_{T_0}^{T^* k(v^*)} c_0(x) dx + f(v^*) + \frac{g(v^*)}{k(v^*)} \left(e_0 - \int_{v_0}^{v^*} k(v') f(v') dv' \right). \quad (\text{A24})$$

Elimineras e_0 mellan (A23) och (A24) erhålles

$$p = f(v) + \frac{g(v)}{k(v)} \left(\frac{k(v^*)}{g(v^*)} (p^* - f(v^*)) - \int_{v^*}^v k(v') f(v') dv' \right). \quad (\text{A25})$$

Isentropen genom (v^*, p^*) är således oberoende av $c(v, T)$ vilket även framgår av att isentropen direkt erhålles ur energiekvationen (A2) med villkoret

$$de = -p dv,$$

$$p(v^*) = p^*.$$

Koefficienter till vattenmodellen

$$\begin{aligned}
c_{11}(1) &= 0.005722427d0 & c_{12}(1) &= 0.001015091d0 & c_{13}(1) &= 5.607572d-4 \\
c_{11}(2) &= -1.240522d0 & c_{12}(2) &= -0.3270122d0 & c_{13}(2) &= 0.112284d0 \\
c_{11}(3) &= 50.42535d0 & c_{12}(3) &= 6.734616d0 & c_{13}(3) &= 5.275769d0 \\
c_{11}(4) &= -1.400579d3 & c_{12}(4) &= 1.552785d4 & c_{13}(4) &= 82.21745d0 \\
c_{11}(5) &= 4.137950d6 & c_{12}(5) &= -2.926440d6 & c_{13}(5) &= -147.1514d0 \\
c_{11}(6) &= -2.726437d8 & c_{12}(6) &= 2.139341d8 & c_{13}(6) &= -4.044093d3 \\
c_{11}(7) &= -1.295684d11 & c_{12}(7) &= -5.615358d9 & c_{13}(7) &= -3.130131d4 \\
c_{11}(8) &= 1.437988d13
\end{aligned}$$

$$e_{11} = 0.006$$

$$e_{12} = 0.017$$

$$\begin{aligned}
c_{21}(1) &= -0.02748180d0 & c_{22}(1) &= -0.02215430d0 & c_{23}(1) &= 0.00249995d0 \\
c_{21}(2) &= 1.68803854d0 & c_{22}(2) &= 1.510990d0 & c_{23}(2) &= 0.9374720d0 \\
c_{21}(3) &= 17.12981d0 & c_{22}(3) &= -10.56299d0 & c_{23}(3) &= -4.624610d0 \\
c_{21}(4) &= 1.483364d4 & c_{22}(4) &= -5.411856d3 & c_{23}(4) &= -4452203d0 \\
c_{21}(5) &= -1.549072d7 & c_{22}(5) &= 6.176871d5 & c_{23}(5) &= 375.1364d0 \\
c_{21}(6) &= 3.415591d9 & c_{22}(6) &= -1.810118d7 \\
c_{21}(7) &= -2.357818d11 & c_{22}(7) &= -6.205700d8 \\
c_{22}(8) &= 4.406075d10 \\
c_{22}(9) &= -6.587460d11
\end{aligned}$$

$$e_{21} = 0.0032$$

$$e_{22} = 0.0245$$

$$\begin{aligned}
c_{31}(1) &= 0.0268d0 \\
c_{31}(2) &= -0.4148d0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{41}(1) &= 0.005d0 \\
c_{41}(2) &= 0.0741d0
\end{aligned}$$