



# Respons av elastisk cirkulär platta vid impulslast

ANDERS TJERNBERG

FOI är en huvudsakligen uppdragsfinansierad myndighet under Försvarsdepartementet. Kärnverksamheten är forskning, metod- och teknikutveckling till nytta för försvar och säkerhet. Organisationen har cirka 1350 anställda varav ungefär 950 är forskare. Detta gör organisationen till Sveriges största forskningsinstitut. FOI ger kunderna tillgång till ledande expertis inom ett stort antal tillämpningsområden såsom säkerhetspolitiska studier och analyser inom försvar och säkerhet, bedömningen av olika typer av hot, system för ledning och hantering av kriser, skydd mot hantering av farliga ämnen, IT-säkerhet och nya sensorers möjligheter.



FOI  
Totalförsvarets forskningsinstitut  
Vapen och skydd  
147 25 Tumba

Tel: 08-555 030 00  
Fax: 08-555 031 00

[www.foi.se](http://www.foi.se)

FOI-R--1959--SE Teknisk rapport  
ISSN 1650-1942 Mars 2006

**Vapen och skydd**

Anders Tjernberg

# Respons av elastisk cirkulär platta vid impulslast

<b>Utgivare</b> FOI - Totalförsvarets forskningsinstitut Vapen och skydd 147 25 Tumba	<b>Rapportnummer, ISRN</b> FOI-R--1959--SE	<b>Klassificering</b> Teknisk rapport
	<b>Forskningsområde</b> 5. Bekämpning och skydd	
	<b>Månad, år</b> Mars 2006	<b>Projektnummer</b> E2036
	<b>Delområde</b> 51 VVS med styrda vapen	
	<b>Delområde 2</b>	
<b>Författare/redaktör</b> Anders Tjernberg	<b>Projektledare</b> Bo Johansson	
	<b>Godkänd av</b> Magnus Oskarsson	
	<b>Uppdragsgivare/kundbeteckning</b> Försvarsmakten	
	<b>Tekniskt och/eller vetenskapligt ansvarig</b>	
<b>Rapportens titel</b> Respons av elastisk cirkulär platta vid impulslast		
<b>Sammanfattning</b> <p>Utböjningar och spänningar i en cirkulär elastisk platta som belastas av en impulslast från en luftstövåg har studerats med analytiska ekvationer. I härledningen antas att luftstövågen är så pass svag att plattans maximala utböjningen är i samma storleksordningen som dess tjocklek. Dessa ekvationer bör vara tillämpliga för stålplattor om ingen plasticering tillåts, samt för till exempel cirkulära fönsterglas. Det går att ställa upp motsvarande ekvationer även för rektangulära plattor, som ju stämmer bättre med formen på fönsterglas.</p> <p>Den beräknade effektivspänningen och utböjningen har jämförts med en simulering i AUTODYN och överensstämmelsen har befunnits vara godtagbar. Med det begränsade underlag som finns verkar det troligt att den maximala effektivspänningen kan bestämmas med en noggrannhet på ca +/- 10%.</p>		
<b>Nyckelord</b> Stötvåg, utböjning, platta, mina, AUTODYN		
<b>Övriga bibliografiska uppgifter</b>	<b>Språk</b> Svenska	
<b>ISSN</b> 1650-1942	<b>Antal sidor:</b> 20 s.	
<b>Distribution enligt missiv</b>	<b>Pris:</b> Enligt prislista	

<b>Issuing organization</b> FOI – Swedish Defence Research Agency Weapons and Protection SE-147 25 Tumba	<b>Report number, ISRN</b> FOI-R--1959--SE	<b>Report type</b> Technical report
	<b>Programme Areas</b> 5. Strike and protection	
	<b>Month year</b> March 2006	<b>Project no.</b> E2036
	<b>Subcategories</b> 51 Weapons and Protection	
	<b>Subcategories 2</b>	
<b>Author/s (editor/s)</b> Anders Tjernberg	<b>Project manager</b> Bo Johansson	
	<b>Approved by</b> Magnus Oskarsson	
	<b>Sponsoring agency</b> Swedish Armed Forces	
	<b>Scientifically and technically responsible</b>	
<b>Report title (In translation)</b> Response of elastic circular plate with impulse load		
<b>Abstract</b> <p>Deflections and stresses in a circular elastic plate loaded by an air blast wave have been studied with analytical equations. In the derivation it is assumed that the blast wave is so weak that the deflection of the plate is of the same size as its thickness. The equations can possibly be valid for steel plates if no plastic deformation is allowed and for example for circular window glasses. It is possible to derive equations for rectangular plates also, which is in better agreement with the shape of window glasses.</p> <p>The calculated effective stress and deflection have been compared with a simulation in AUTODYN and the agreement is found to be acceptable. With the limited data at hand it is likely that the maximum effective stress can be determined within +/- 10%.</p>		
<b>Keywords</b> Blast, deflection, mine, plate, AUTODYN		
<b>Further bibliographic information</b>	<b>Language</b> Swedish	
<b>ISSN</b> 1650-1942	<b>Pages</b> 20 p.	
	<b>Price acc. to pricelist</b>	

## Innehållsförteckning

<b>INLEDNING .....</b>	<b>5</b>
<b>BERÄKNINGSMODELL .....</b>	<b>5</b>
<b>JÄMFÖRELSE MED EN SIMULERING I AUTODYN.....</b>	<b>12</b>
<b>REFERENSER.....</b>	<b>18</b>
<b>BILAGA 1.....</b>	<b>19</b>
<b>BILAGA 2.....</b>	<b>20</b>

## Inledning

Utböjningar och spänningar i en cirkulär platta som belastas av en impulslast från en luftstövåg har studerats med analytiska ekvationer. Plattan antas bestå av ett elastiskt material dvs. ingen hänsyn tas till plasticering. Vidare antas att utböjningen är liten dvs. av samma storleksordning som plattjockleken. Inverkan av membranspänningar försummas även, vilket är godtagbart om utböjningen är liten. Dessutom bör plattans tjocklek vara betydligt mindre än plattans radie för att ekvationerna skall kunna tillämpas med god noggrannhet.

I [1] har utböjningar för plattor som plasticerar studerats. Överslagsmässiga ekvationer ges för både små och stora deformationer, även plastiska töjningar berörs.

När det gäller stötvågor från fordonssminor är dessa vanligen så stora att det är oundvikligt med plastiska deformationer om inte avståndet av någon anledning skulle vara mycket stort. Detta innebär att de ekvationer som anges i rapporten vanligen saknar praktiska tillämpningar när det gäller minskydd. Ekvationerna kan dock vara tillämpliga vid till exempel stötvågor mot glasrutor eftersom dessa inte kan plasticera. I detta fall är det den största huvudspänningen som avgör om brott sker och inte effektivspänningen.

Stötvågor från sfäriska laddningar [2] har studerats, inget hindrar dock att de impulsfördelningar som redovisats i [2] för halvsfäriska och platta laddningar [1] används i beräkningarna. Laddningen antas vara placerad på förlängningen av plattans normal i centrum så att belastningen är axialsymmetrisk. Jämförelser av utböjningar och spänningar har även gjorts med simuleringar med AUTODYN. En del av de ekvationer som redovisas i rapporten har tidigare redovisats i [3].

För att förenkla beräkningarna antas i första skedet att impulsen ger en momentan hastighetsfördelning på plattan och att impulsöverföringstiden är mycket kort (oändligt kort). Vanligen krävs att impulsöverföringstiden (övertryckets varaktighet) är mindre än ungefär en fjärdedel av den tid som det tar för plattan att böja ut till maximalt läge, för att denna förenkling skall vara tillämplig. I slutet av nästa huvudstycke redovisas även ekvationer som kan användas om impulsöverföringstiden inte är kort. Det visar sig där att spänningarna påverkas mycket mera än utböjningen av impulsöverföringstiden. Att anse att impulsöverföringstiden är oändligt kort överskattar troligen alltid den maximala spänningen.

## Beräkningsmodell

Enligt [2] kan den reflekterade impulsintensiteten  $i_0$  (Pa s) för TNT i luft beräknas med en empirisk ekvation som ges av

$$i_0(d, m) = m^{1/3} 10^{2.5587 - 0.9031U(d, m) + 0.1018(U(d, m))^2 - 0.0242(U(d, m))^3}, \quad (1)$$

där

$$U(d, m) = -0.2040 + 1.3788 \log\left(\frac{d}{m^{1/3}}\right). \quad (2)$$

Parametern  $d$  är avståndet i meter till laddningen och  $m$  är det aktuella sprängämnetets massa (kg) multiplicerad med trotylekvivalensen. Ekvationen är baserad på experimentella resultat och gäller för en sfärisk laddning vid vinkelrätt anslag mot en stel yta. Den är giltig för intervallet  $0.0531 < d/m^{1/3} < 40$ .

För en stötvåg med snett anslag kan den reflekterade impulsintensiteten approximeras genom att beräkna komponenten av  $i_0(d, m)$  vinkelrätt mot den reflekterande ytan enligt

$$i(r) = i_0\left(\sqrt{s^2 + r^2}, m\right) \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}}, \quad (3)$$

där  $s$  är det vinkelräta avståndet (m) från den reflekterande ytan (plattan) till centrum av den sfäriska laddningen och  $r$  är det radiella avståndet längs den reflekterande ytan. Ekvationen kan även användas för en halvsfärisk laddning på ett stelt underlag om  $m$  i ekv. (1)-(3) ersätts med dubbla laddningsvikten. Övertryckets varaktighet kan även uppskattas med ekvationer i [2].

Plattekvationen [4] (Kirchhoffplatta) för utböjningen  $w(r, t)$  utan yttre last ges av

$$\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h} \Delta \Delta w(r, t) = 0, \quad (4)$$

där  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  är elasticitetsmodulen,  $h$  är plattjockleken,  $\nu$  är kontraktionskoefficienten och  $\rho$  är densiteten. Vidare är  $\Delta$  Laplace-operatorm som i cylindriska koordinater ges av  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ . Avsikten är att hantera lasten från stötvågen som ett begynnelsevillkor, det vill säga som en initial hastighetsfördelning som ges av  $i(r)/(\rho h)$ , där  $i(r)$  är impulsintensiteten från till exempel ekv. (3). Att en initial hastighetsfördelning appliceras samtidigt längs hela plattan innebär att det faktum att stötvågen anländer något senare till de yttre delarna än till centrum av plattan försummas. Denna effekt är dock liten om avståndet  $s$  är stort.

Vidare ges momentet av

$$M_r(r, t) = -D \left( \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \right), \quad (5)$$

vilket behövs för att bestämma randvillkoret för en fritt upplagd platta eftersom momentet är noll vid plattans radie  $a$ .

En ansats är att utböjningen kan tecknas  $w(r, t) = T(t)R(r)$ , där  $T$  är en funktion som enbart beror av tiden och  $R$  är en funktion som enbart beror av radien. Som framgår av fortsättningen är ansatsen egentligen en summering det vill säga  $w(r, t) = \sum_k T_k(t)R_k(r)$ .

Insätts ansatsen i ekv. (4) leder detta till

$$\frac{d^2T(t)/dt^2}{T(t)} = -\frac{D}{\rho h} \frac{\Delta\Delta R(r)}{R(r)}. \quad (6)$$

När vänsterledet enbart beror av  $t$  och högerledet enbart beror av  $r$  måste dessa vara lika med en konstant (oberoende av  $r$  och  $t$ ) som i det här fallet sätts till  $-\omega^2$ .

Detta leder till två ordinära differentialekvationer som ges av

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0, \quad (7)$$

$$\Delta\Delta R(r) - \mu^4R(r) = 0, \quad (8)$$

där  $\mu^4 = \frac{\rho h}{D}\omega^2$ . Det framgår av fortsättningen att  $\omega$  är plattans egenfrekvenser (som är oändligt många) och  $R(r)$  är de motsvarande egenmoderna.

Lösningen till ekv. (7) ges av

$$T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \quad (9)$$

Vidare kan ekv. (8) skrivas

$$\frac{\partial^4 R(r)}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 R(r)}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \mu^4 R(r) = 0, \quad (10)$$

eller hellre

$$(\Delta - \mu^2)(\Delta + \mu^2)R(r) = 0. \quad (11)$$

Av förklarliga skäl måste  $R(r)$  vara ändlig i centrum. Detta innebär att lösningen till  $(\Delta - \mu^2)R(r) = 0$  blir  $R(r) = I_0(\mu r)$ , där  $I_0(\mu r)$  en modifierad Besselfunktion av första typen och ordning noll. Vidare är lösningen  $R(r) = J_0(\mu r)$  till  $(\Delta + \mu^2)R(r) = 0$ , där  $J_0(\mu r)$  är en Besselfunktion av första typen och ordning noll.

Lösningen till ekv. (11) ges således av

$$R(r) = C_1 J_0(\mu r) + C_2 I_0(\mu r). \quad (12)$$

Den ena av konstanterna  $C_1$  och  $C_2$  kan sättas till ett, eftersom  $w(r,t)$  är produkten av  $R(r)$  och  $T(t)$ . Vidare innehåller även  $T(t)$  konstanter  $a$  och  $b$  som senare skall bestämmas.



Lösningen ges därmed av

$$R(r) = CJ_0(\mu r) + I_0(\mu r), \quad (13)$$

där  $C$  och  $\mu$  bestäms av randvillkoren.

Randvillkoren för en fast inspänd platta med radien  $a$  ges av

$$w(a, t) = 0 \Rightarrow R(a) = 0 \Rightarrow CJ_0(\mu a) + I_0(\mu a) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial w(a, t)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{dR(a)}{dr} = 0 \Rightarrow C\mu J_0'(\mu a) + \mu I_0'(\mu a) = 0 \quad (15)$$

Genom att utnyttja att  $J_0'(x) = -J_1(x)$  och  $I_0'(x) = I_1(x)$ , där indexet anger ordningstalen för Besselfunktionerna, ges lösningen till ekvationssystemet ovan av

$$C = -\frac{I_0(\mu a)}{J_0(\mu a)} \quad (16)$$

och  $\mu$  ges av lösningarna till

$$I_0(\mu a)J_1(\mu a) + J_0(\mu a)I_1(\mu a) = 0. \quad (17)$$

Denna ekvation har oändligt många lösningar (vilket motsvarar egenfrekvenserna) vilka måste lösas numeriskt.

Om konstanten  $\alpha = \mu a$  införs kan randvillkoret sammanfattas som

Fast inspänd platta

$$R_k(r) = -\frac{I_0(\alpha_k)}{J_0(\alpha_k)} J_0(\alpha_k r/a) + I_0(\alpha_k r/a) \quad (18)$$

där  $\alpha_k$  är lösningarna till

$$I_0(\alpha_k)J_1(\alpha_k) + J_0(\alpha_k)I_1(\alpha_k) = 0 \quad (19)$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left( \frac{\alpha_k}{a} \right)^2 \quad (20)$$

I Bilaga 1 ges nio stycken värden för  $\alpha$ , det är noterbart att  $\alpha$  i detta fall inte beror av  $\nu$ .

Randvillkoren för en fritt upplagd platta är

$$w(a, t) = 0 \Rightarrow R(a) = 0 \Rightarrow CJ_0(\mu a) + I_0(\mu a) = 0, \quad (21)$$

samt

$$M_r(a,t)=0 \Rightarrow -D\left(\frac{d^2R(a)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dR(a)}{dr}\right)=0 \Rightarrow \quad (22)$$

$$-D\left(C\mu^2 J_0''(\mu a) + \mu^2 I_0''(\mu a) + \frac{\nu}{a}\left(C\mu J_0'(\mu a) + \mu I_0'(\mu a)\right)\right)=0.$$

Genom att utnyttja att  $J_1'(x) = J_0(x) - 1/x J_1(x)$  och  $I_1'(x) = I_0(x) - 1/x I_1(x)$  ges lösningen av ekvationssystemet ovan av ekv. (23) och (24).

Fritt upplagd

$$R_k(r) = -\frac{I_0(\alpha_k)}{J_0(\alpha_k)} J_0(\alpha_k r/a) + I_0(\alpha_k r/a) \quad (23)$$

där  $\alpha_k$  är lösningarna till

$$J_0(\alpha_k)[\alpha_k I_0(\alpha_k) - (1-\nu)I_1(\alpha_k)] + I_0(\alpha_k)[\alpha_k J_0(\alpha_k) - (1-\nu)J_1(\alpha_k)] = 0 \quad (24)$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{\alpha_k}{a}\right)^2} \quad (25)$$

I Bilaga 1 ges nio stycken värden för  $\alpha$  som gäller för  $\nu=0.3$ .

Utböjningen ges därmed av

$$w(r,t) = \sum_k (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) R_k(r), \quad (26)$$

där ekvationerna (18)-(20) eller (23)-(25) utnyttjas beroende på om plattan är fast inspänd eller fritt upplagd. Återstår att bestämma  $a_k$  och  $b_k$  så att begynnelsevillkoren uppfylls. Det ena villkoret att plattan är odeformerad vid begynnelsen vilket ger  $a_k=0$ . Det andra villkoret är att hastighetsfördelningen skall vara  $i(r)/(\rho h)$ . Detta medför att

$$\frac{\partial w(r,0)}{\partial t} = \sum_k b_k \omega_k R_k(r) \Rightarrow \sum_k b_k \omega_k R_k(r) = \frac{i(r)}{\rho h}. \quad (27)$$

Båda leden multipliceras med  $R_j(r)r$  och integreras från noll till  $a$ . Vidare kan integralen flyttas innanför summationstecknet, vilket ger

$$\sum_k b_k \omega_k \int_0^a R_j(r) R_k(r) r dr = \int_0^a \frac{i(r)}{\rho h} R_j(r) r dr. \quad (28)$$

I [5] visas en allmän egenskap att egenmoderna  $R_k(r)$  är ortogonala med avseende på en viktfunktion som beskriver massfördelningen. Viktfunktion är  $r$  eftersom massan för ett infinitesimal ring ökar linjär med radien. Då egenmoderna  $R_k(r)$  är ortogonala med avseende på viktfunktionen  $r$  gäller att

$$\int_0^a R_j(r)R_k(r)rdr = 0 \text{ om } k \neq j. \quad (29)$$

Om  $k = j$  är integralen ovan skild från noll.

Ett annat sätt att fastställa ortogonalitet är att ekv. (11) tillsammans med randvillkoren är en typ av problem som kallas Sturm-Liouville. För dessa problemtyper är lösningarna ortogonala [6].

Om integralen i ekv. (29) beräknas numeriskt blir den inte exakt noll och om indexet  $j$  eller  $k$  har ett högt värde kan integralen få ett ganska stort värde. Om integralen i ekv. (29) ses som en matris går det dock att konstatera att diagonaltermerna i matrisen har åtskilliga tiopotenser högre värden än de termer som ligger utanför diagonalen. Detta är då tillräckligt för att kunna försumma termerna utanför diagonalen. För att termerna utanför diagonalen skall få små värden är det nödvändigt med många decimaler för  $\alpha_k$  när integralen beräknas. Däremot behövs bara 3-4 decimaler för att beräkna ett korrekt värde för diagonaltermerna. Så många decimaler för  $\alpha_k$  som anges i Bilaga 1 är därför inte nödvändigt.

Då egenmoderna är ortogonala kan konstanterna  $b_k$  i ekv. (28) beräknas som

$$b_k = \frac{1}{\omega_k \int_0^a (R_k(r))^2 r dr} \int_0^a \frac{i(r)}{\rho h} R_k(r) r dr. \quad (30)$$

I detta fall har indexet  $j$  bytts mot  $k$ .  $R_k(r)$  och  $\omega_k$  ges av ekv. (18)-(20) eller ekv. (23)-(25) beroende på randvillkoren.

Utböjningen ges således av

$$w(r,t) = \sum_k b_k \sin(\omega_k t) R_k(r), \quad (31)$$

där  $b_k$  ges av ekv. (30).

När utböjningen är känd ges de radiella och tangentiella böjspänningarna av

$$\sigma_r(r,t) = -\frac{6D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \right), \quad (32)$$

samt

$$\sigma_{\theta}(r,t) = -\frac{6D}{h^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \right). \quad (33)$$

Med tecknet ovan, blir dessa spänningar positiva och avser därmed de dragspänningar som uppstår på ytan på baksidan av plattan, om framsidan är den del som träffas av stötvågen.

Effektivspänningen ges av

$$\sigma_{eff}(r,t) = \sqrt{\sigma_r(r,t)^2 + \sigma_{\theta}(r,t)^2 - \sigma_r(r,t)\sigma_{\theta}(r,t)}. \quad (34)$$

Om impulsöverföringstiden inte är tillräckligt kort så kan impulslasten hanteras som en yttre trycklast, istället för som ett begynnelsevillkor i härledningen ovan. Utböjningen kan då skrivas

$$w(r,t) = \sum_k q_k(t) R_k(r). \quad (35)$$

Denna ansats sätts in i platttekvationen i ekv. (4), men med den skillnaden att högerledet inte är noll utan är lika med  $p(r,t)/(\rho h)$ . Där  $p(r,t)$  är det reflekterade trycket från stötvågen på plattan. Vidare kan ekv. (8) utnyttjas. Som tidigare kan båda leden i denna ekvation multipliceras med  $R_j(r)r$ , integreras och vidare kan det utnyttjas att egenmoderna är ortogonala. Den återstående differentialekvationen av  $q_k(t)$  kan sedan Laplace-transformeras och sedan transformeras tillbaka till tidsplanet. Vidare utnyttjas att plattans hastighet och utböjning är noll vid tiden noll. Detta innebär att  $q_k(t)$  ges av

$$q_k(t) = \frac{1}{\omega_k \int_0^a (R_k(r))^2 r dr} \int_0^t \left( \int_0^a \frac{p(r,u)}{\rho h} R_k(r) r dr \right) \sin(\omega_k(t-u)) du. \quad (36)$$

Om trycket  $p(r,t)$  antas avta linjärt med tiden så att trycket är noll vid tiden  $t_{dur}$ , ges trycket av

$$p(r,t) = \frac{2i(r)}{t_{dur}} \left( 1 - \frac{t}{t_{dur}} \right) \text{ om } t \leq t_{dur}, \quad p(r,t) = 0 \text{ om } t > t_{dur}. \quad (37)$$

I detta fall blir  $\int_0^{\infty} p(r,t) dt = i(r)$ . Ekv. (35) och (36) kan då skrivas om till

$$w(r, t) = \frac{2}{\rho h (t_{dur})^2} \sum_k \frac{\int_0^a i(r) R_k(r) r dr}{(\omega_k)^3 \int_0^a (R_k(r))^2 r dr} R_k(r) \Omega_k(t), \quad (38)$$

där  $\Omega_k(t)$  ges av

$$\Omega_k(t) = t_{dur} \omega_k - \omega_k t - \omega_k t_{dur} \cos(\omega_k t) + \sin(\omega_k t) \text{ om } t \leq t_{dur}, \quad (39)$$

$$\Omega_k(t) = \sin(t_{dur} \omega_k) \cos(\omega_k t) - \cos(t_{dur} \omega_k) \sin(\omega_k t) - \omega_k t_{dur} \cos(\omega_k t) + \sin(\omega_k t) \text{ om } t > t_{dur}. \quad (40)$$

## Jämförelse med en simulering i AUTODYN

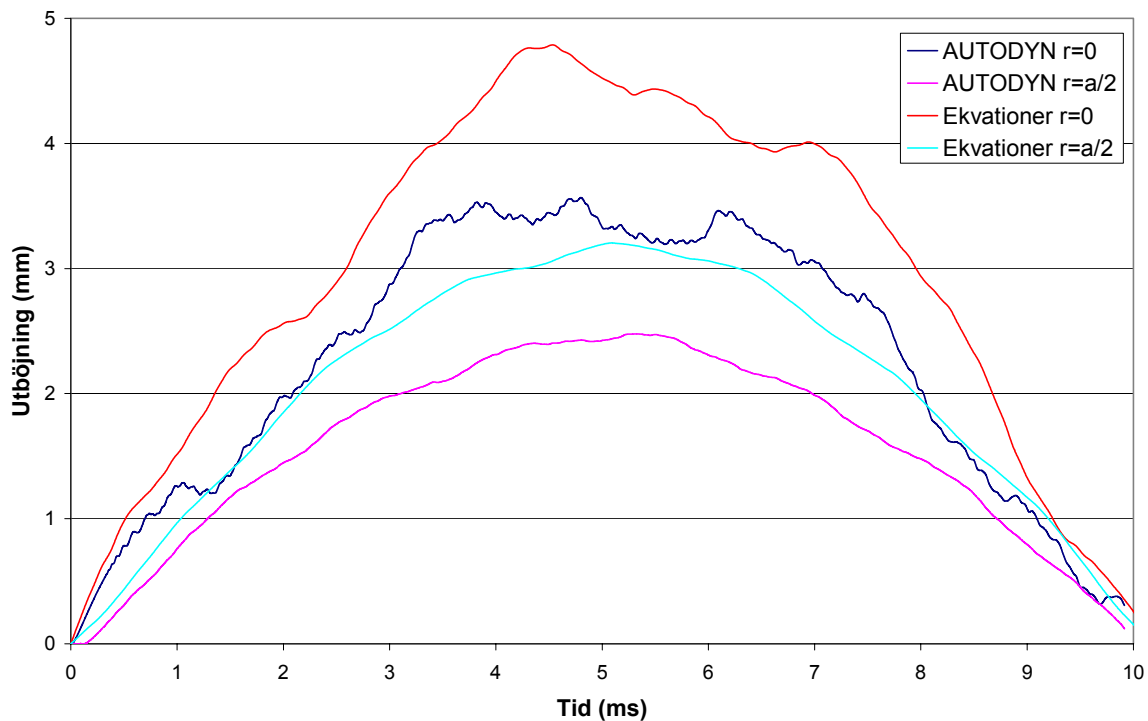
För att verifiera de analytiska beräkningarna har resultatet jämförts med en simulering i AUTODYN. Simuleringen har gjorts med en fritt upplagd elastisk stålplatta med tjockleken 10 mm och radien 500 mm. Laddningen av TNT är sfärisk med massan 15 g och avståndet mellan laddningens centrum och plattan är 200 mm. Laddningen är liten eftersom utböjningen inte gärna bör bli större än plattjockleken om de analytiska beräkningarna skall kunna användas med god noggrannhet.

De analytiska beräkningarna gjordes med 9 stycken frihetsgrader (egenmoder), det vill säga alla  $\alpha_k$  som ges i Bilaga 1 användes. För att spänningarna skall konvergera krävs betydligt flera moder än för utböjningarna, där det oftast räcker med 1-2 moder.

Simuleringen i AUTODYN gjordes med 8 celler i plattans tjockleksriktning och 200 celler längs radien. Då varje nod har två frihetsgrader (utom några få på centrumlinjen och längs randen) blir antalet frihetsgrader för plattan 3600 stycken. Även spränggasernas expansion och växelverkan med plåten simulerades. Cellstorleken i Euler-griden var 0.5 mm för de celler som omger laddningen. Det konstaterades att spänningarna påverkades något av om simuleringen gjordes med dubbel eller enkel precision, de resultat som redovisas är därför gjorda med dubbel precision. De JWL-parametrar som använts för TNT redovisas i Bilaga 2.

Ekv. (3) ger impulsintensiteten 182 Pas i centrum och 62 Pas vid radien  $a/2$ . Simuleringen ger impulsintensiteten 154 Pas i centrum (avseende övertrycket) och 65 Pas vid  $a/2$ . Den totala impulsen som fås genom att integrera ekv. (3) ger impulsen 39.4 Ns. Simuleringen ger den totala impulsen 42.7 Ns och impulsöverföringstiden 0.5 ms. Uppskattningar med ekvationer från [2] ger en liknande impulstid.

I Figur 1 jämförs utböjningen från simuleringar i AUTODYN med utböjningen enligt ekv. (31). Jämförelsen görs både i centrum  $r=0$  och vid  $r=a/2$ . Det framgår att utböjningen är mindre än halva plattjockleken och att tiden till maximal utböjning är betydligt större än impulsöverföringstiden, ekv. (31) bör därför vara tillämplig. Utböjningen överskattas dock något med ekv. (31). Detta beror delvis på att impulsintensiteten i centrum blir något högre med ekv. (3) än i simuleringen. Å andra sidan påverkas impulsintensiteten i centrum relativt mycket av cellstorleken i Euler-griden [7], något mindre celler skulle antagligen öka impulsintensiteten något. Den andra orsaken till avvikelserna är att det i simuleringen skapas ett undertryck efter övertrycksfasen vilket möjligen kan minska utböjningen något. I vanliga fall är undertrycket försumbart jämfört med övertrycket, men i detta fall med en relativt liten laddning är det möjligt att undertrycket inte kan försummas helt och hållet. En tredje orsak till avvikelserna kan vara att i simuleringen appliceras inte initialhastigheten momentant på hela plattan samtidigt, dessutom är inte impulsöverföringstiden oändligt kort.

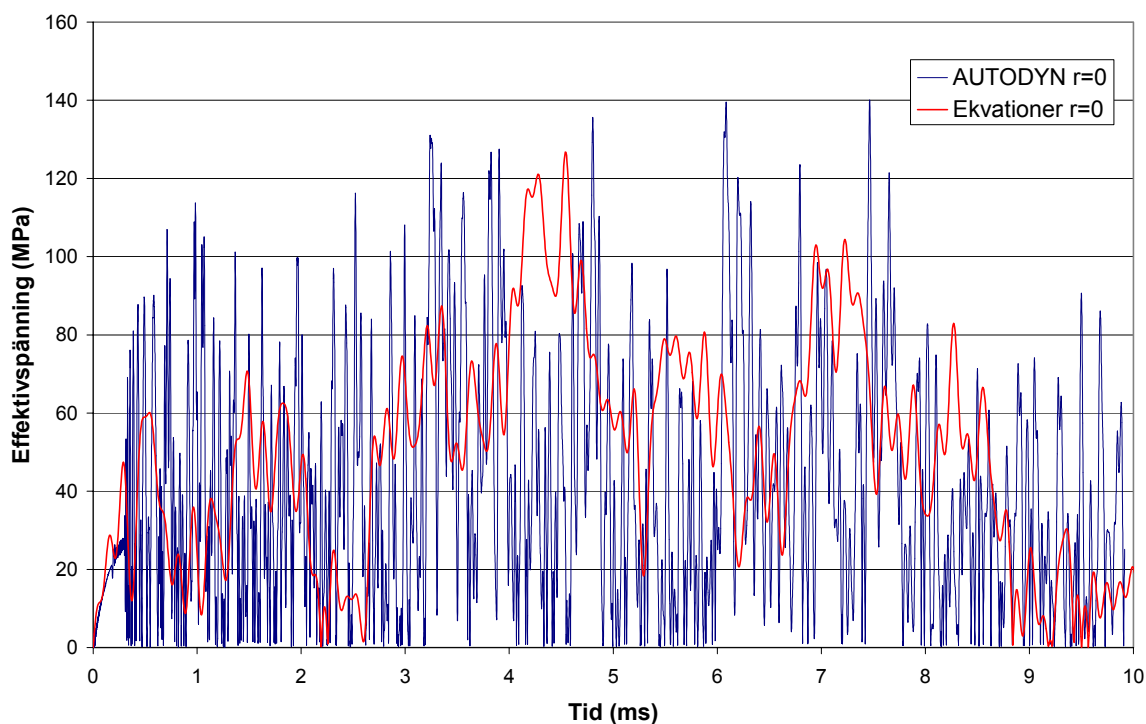


**Figur 1:** Utböjningen som funktion av tiden.

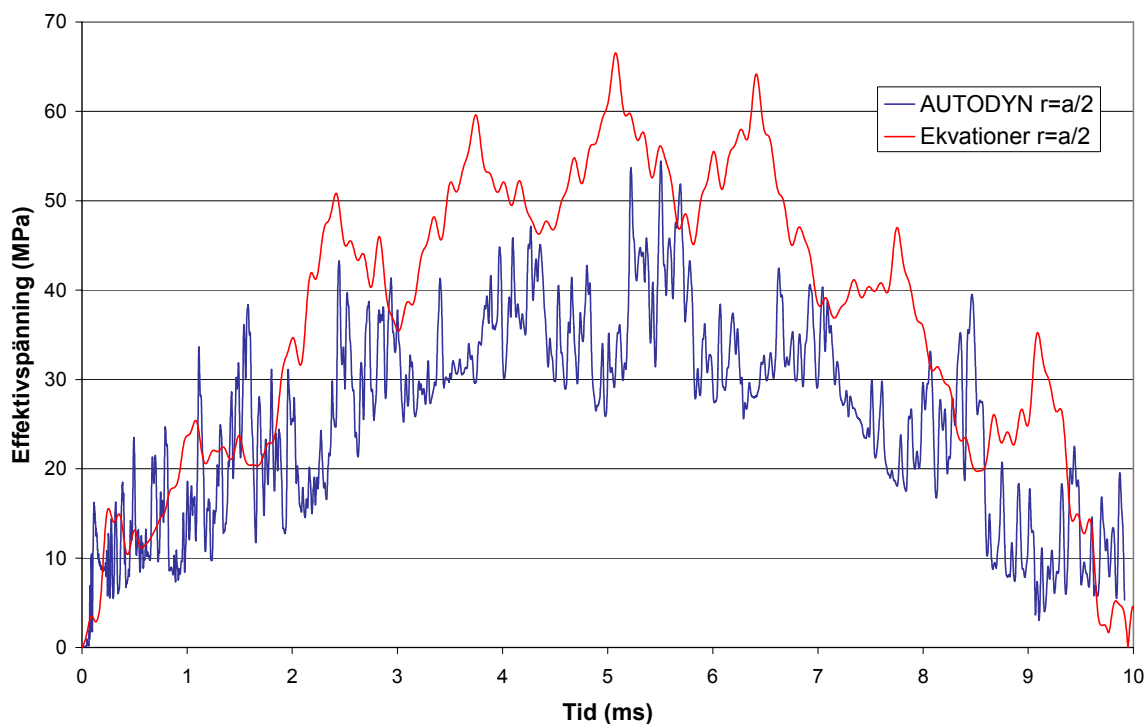
Den analytiska beräkningen (ekv. (31)) ger den maximala utböjningen 4.79 mm om 9 stycken moder används, se Figur 1. Om endast en egenmod används blir utböjningen 4.58 mm, således en mycket liten skillnad.

Om ekv. (38) användas med en tryckfördelning som avtar linjärt med tiden och blir noll vid tiden 0.5 ms, ger ekv. (38) en i det närmaste identisk utböjning som med ekv. (31) (om än med en liten tidsförskjutning). Följaktligen är impulsöverföringstiden 0.5 ms tillräckligt kort för att utböjningen inte skall påverkas. Därmed kan inte impulsöverföringstiden förklara skillnaden mellan simuleringen och ekv. (31).

I Figur 2 och 3 jämförs effektivspänningen mellan simuleringar och med ekvationer. Jämförelsen görs både i centrum  $r=0$  och vid  $r=a/2$  när spänningen är beräknad utgående från utböjningen enligt ekv. (31). Det framgår att den maximala effektivspänningen (toppvärdet) är ganska lika. Överensstämmelsen är dock inte så bra att spänningarna direkt överlappar varandra. Simuleringen har av någon anledning ett betydligt mera högfrekvent innehåll vid  $r=0$ . Om endast en egenmod används för att beräkna effektivspänningen blir det maximala värdet 73 MPa, vilket skall jämföras med 127 MPa med 9 stycken moder. Det är inte troligt att flera moder skulle förbättra överensstämmelsen markant, detta eftersom skillnaden mellan att använda 8 eller 9 moder inte påverkar spänningen särskilt mycket.



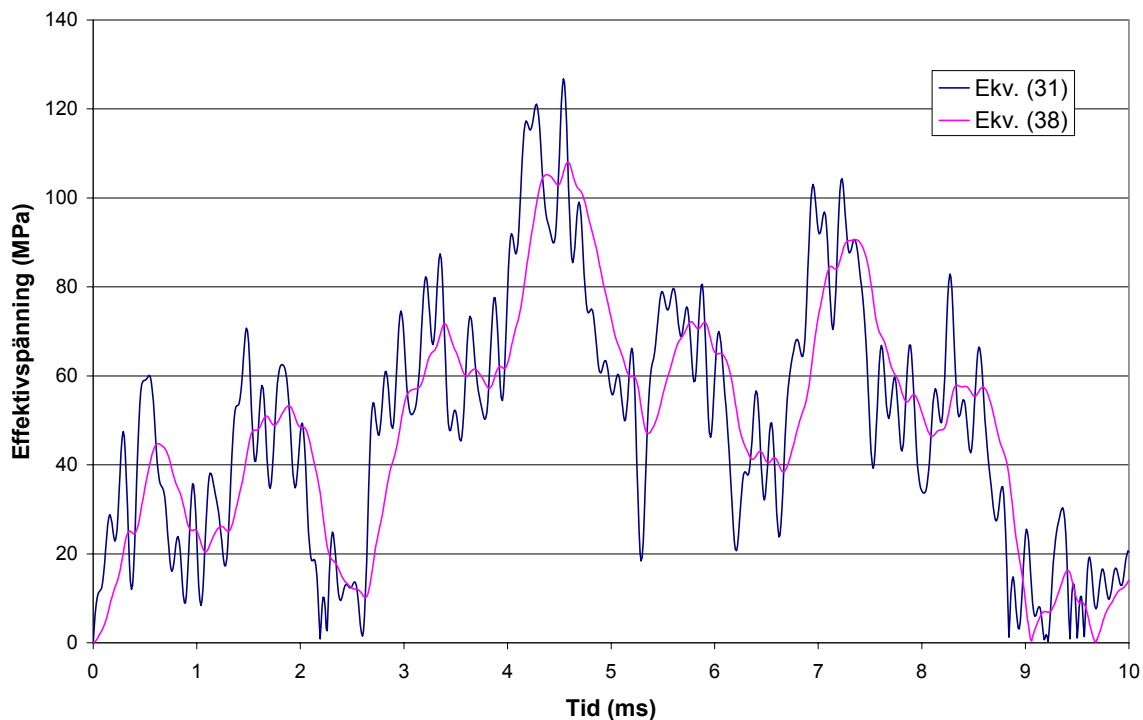
**Figur 2:** Effektivspänning som funktion av tiden i centrum.



**Figur 3:** Effektivspänning som funktion av tiden vid  $r = a/2$ .

I Figur 4 visas en jämförelse när spänningarna är beräknade utgående från utböjningen enligt ekv. (31) (som i Figur 2) eller ekv. (38). I ekv. (38) har impulsöverföringstiden ( $t_{dur}$ ) 0.5 ms använts. Det framgår att spänningen blir något lägre när hänsyn tas till att impulsöverföringstiden inte är oändligt kort. Det är uppenbart att spänningen påverkas mera än utböjningen av impulsöverföringstiden. Vidare framgår av Figur 4 att det högfrekventa innehållet reduceras när hänsyn tas till impulsöverföringstiden.





**Figur 4:** Effektivspänningen som funktion av tiden i centrum.

Ytterligare en jämförelse gjordes genom att i simuleringen applicera en initial hastighet på 1 m/s på hela plattan. I detta fall stämmer utböjningen i det närmaste exakt mellan ekvationerna och simuleringen, funktionerna överlappar i princip varandra helt och hållet. Effektivspänningen stämmer dock inte riktigt så bra att funktionerna överlappar varandra helt och hållet. Överensstämmelsen är dock betydligt bättre än vad som visas i Figur 2 och 3.

Det kan även påpekas att för en Kirchhoffplatta tas ingen hänsyn till skjuvdeformation och rotationströgheten. Inverkan av dessa kan vara ganska stor för tjocka plattor eller för tunna plattor som svänger med moder med höga ordningstal [8]. Ett alternativ till Kirchhoffplatta är Mindlinplattan som även tar hänsyn till de effekter som nämnts ovan. Nackdelen är att analytiska lösningar blir mycket komplexa.

Med de analytiska ekvationerna är det även möjligt att uppskatta vilken tjocklek på bottenplåten på ett stridfordon som krävs för att ingen plastisk deformation skall uppstå vid en detonation från en stridsvagnsmina. För att göra detta approximeras bottenplåten med en fritt upplagd cirkulär platta med  $a=1$  m. Laddningen (TNT) antas formad som en halvsfär, med vikten 10 kg och liggande på ett stelt underlag (detta innebär att  $m=20$  kg i ekv. (1)-(3)). Det måste dock påpekats att en platt laddning kan ge betydligt större impulsintensitet, se [1]. Avståndet mellan underlaget och bottenplåten antas vara 500 mm. Om kravet på effektivspänningen är att den inte får överstiga 1.0 GPa, vilket ungefär motsvarar pansarstål, måste tjockleken vara minst 140 mm. Spänningen har då beräknats utgående från utböjningen enligt ekv. (31). Om hänsyn tas till impulsöverföringstiden,  $t_{dur}=0.5$  ms, i ekv. (38) räcker det med tjockleken 110 mm. Detta belyser att kravet ingen plasticering, ger orimligt stora tjocklekar. Möjligen är tjockleken lite för stor för att teorin för en Kirchhoffplatta skall kunna tillämpas med god noggrannhet.

Om bottenplåten som alternativ antas fast inspänd längs randen krävs en något större plättjocklek för att inte spänningen skall överstiga 1.0 GPa (spänningen är beräknad utgående från utböjning enligt enligt ekv. (31)). Verkligheten är förstås någonting mitt emellan dessa två ytterlighetsfall av randvillkor. För de fall som har undersökts så har det ingen stor betydelse om plåten är fritt upplagd eller fast inspänd.

När det gäller fritt upplagd kontra fast inspänd platta är det troligt att ekvationerna i rapporten är giltiga för större utböjningar om plattan är fritt upplagd än om den är fast inspänd. Anledningen är att membranspänningarna blir mycket större i en fast inspänd platta än för en fritt upplagd platta. Som påpekats förut har ju membranspänningarna försumrats.

## Referenser

- [1] Tjernberg A., Utformningar av tryckverkande laddningar och utböjningar av plåtar, FOI-R--1910--SE, 2006.
- [2] Kingery C. N., Bulmash K. J., Airblast parameters from TNT spherical air burst and hemispherical surface burst, Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Technical Report ARBRL-TR-02555, USA, 1984.
- [3] Wijk G., Approximate solutions for explosion created vibration and permanent deformation of beams and plates, FOA-R—00-R01413-310—SE, 2000.
- [4] Sundström B. (red), Handbok och formelsamling i Hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, 1999.
- [5] Thomson W. T., Theory of vibration with applications, second edition, George Allen & Unwin, 1981.
- [6] Kreyszig E., Advanced engineering mathematics, sixth edition, John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1988.
- [7] Olovsson L., Sundel T., Tjernberg A., Johansson B., Finite element simulations of mine blast effects – a convergence study using GRALE2D, Swedish Defence Research Agency, 2005.
- [8] Teknisk balkteori och skrovstatik, CTH, Inst. för Marin Konstruktionsteknik och Hållfasthetslära, 1984.
- [9] LLNL Explosives Handbook, Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants, B.M. Dobratz, P.C. Crawford, Jan 31 1985.

**Bilaga 1**

Fast inspänd platta ( $\alpha$  oberoende av  $\nu$ ).

Lösningar till ekv. (19).

$$\alpha := \begin{pmatrix} 3.196220617 \\ 6.306437048 \\ 9.439499138 \\ 12.577130640 \\ 15.716438527 \\ 18.856545522 \\ 21.997095158 \\ 25.137915406 \\ 28.278913110 \end{pmatrix}$$

Fritt upplagd platta .

Lösningar till ekv. (24) när  $\nu = 0.3$ .

$$\alpha := \begin{pmatrix} 2.221519535 \\ 5.451605702 \\ 8.611391028 \\ 11.760872502 \\ 14.906879079 \\ 18.051294139 \\ 21.194847571 \\ 24.337881913 \\ 27.480579304 \end{pmatrix}$$

**Bilaga 2**

**TNT:** Tillståndsekvation Jones-Wilkins-Lee, [9].

Densitet	1630 kg/m <sup>3</sup>
Parameter A	371 GPa
Parameter B	3.23 GPa
Parameter R <sub>1</sub>	4.15
Parameter R <sub>2</sub>	0.95
Parameter W	0.3
Detonationshastighet	6930 m/s
Energi E <sub>0</sub>	7.0 GJ/m <sup>3</sup>
Tryck P <sub>CJ</sub>	21 GPa