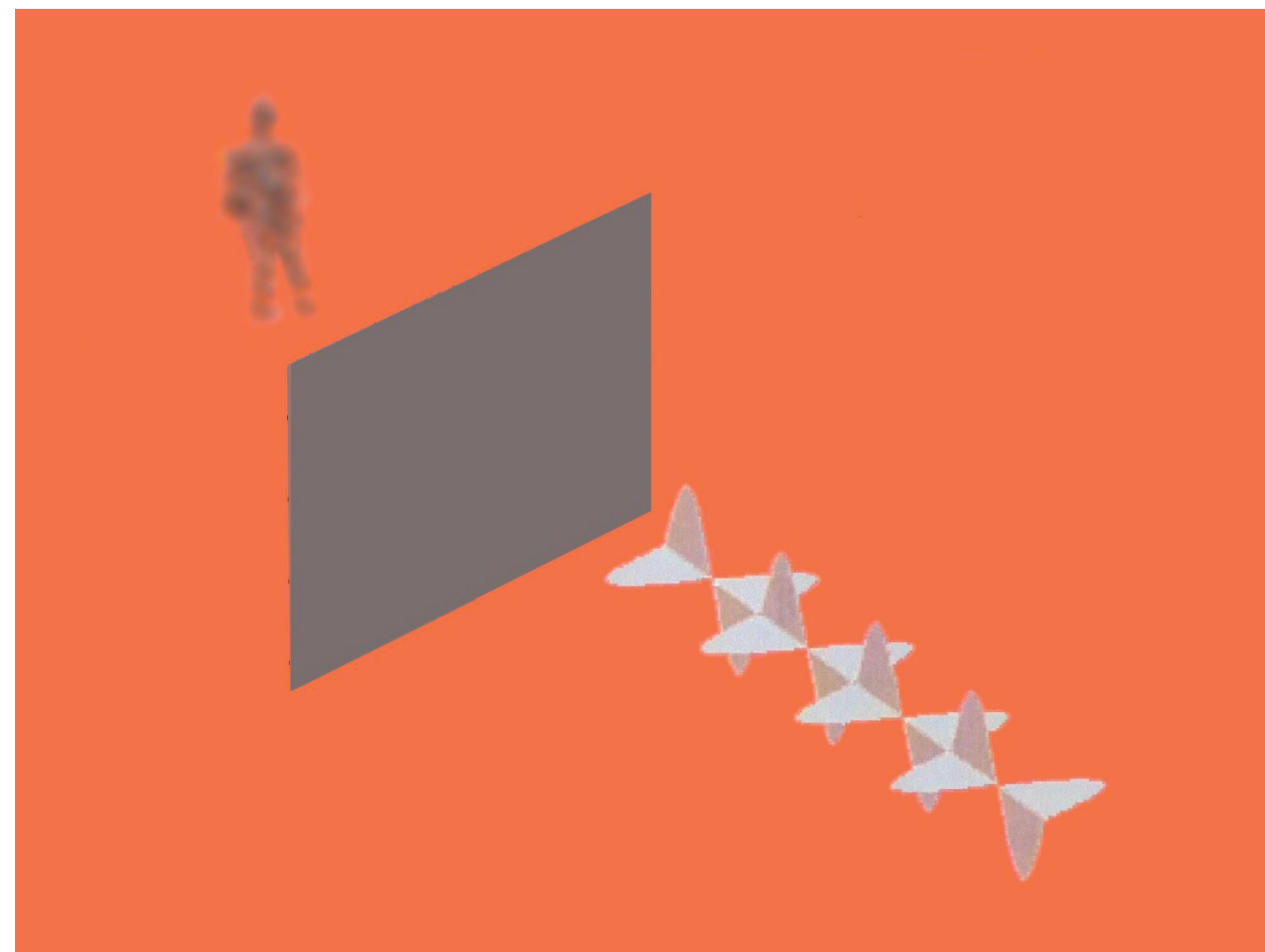




FOI är en huvudsakligen uppdragsfinansierad myndighet under Försvarsdepartementet. Kärnverksamheten är forskning, metod- och teknikutveckling till nytta för försvar och säkerhet. Organisationen har cirka 1000 anställda varav ungefär 800 är forskare. Detta gör organisationen till Sveriges största forskningsinstitut. FOI ger kunderna tillgång till ledande expertis inom ett stort antal tillämpningsområden såsom säkerhetspolitiska studier och analyser inom försvar och säkerhet, bedömning av olika typer av hot, system för ledning och hantering av kriser, skydd mot och hantering av farliga ämnen, IT-säkerhet och nya sensorers möjligheter.

Ain Sume, Tommy Johansson

Polarimetrisk väggpenetrerande radar

Teori, simuleringar och utvecklingsläge

Titel	Polarimetrisk väggpenetrerande radar – Teori, simuleringar och utvecklingsläge
Title	Polarimetric wall penetrating radar – Theory, simulations, and state of development
Rapportnr/Report no	FOI-R--2987--SE
Rapporttyp Report Type	Teknisk rapport Technical report
Antal sidor/Pages	118 p
Månad/Month	April
Utgivningsår/Year	2010
ISSN	ISSN 1650-1942
Kund/Customer	Försvarsmakten
Projektnr/Project no	E53042
Godkänd av/Approved by	Ola Kärvell

Totalförsvarets Forskningsinstitut FOI
 Avdelningen för Informationssystem
 Box 1165
 581 11 Linköping

FOI, Swedish Defence Research Agency
 Information Systems
 P.O. Box 1165
 SE-581 11 Linköping

Sammanfattning

Rapporten utgör en studie av polarisationens egenskaper och möjliga användning med penetrerande radar i urban miljö. Den inleds med en beskrivning av principen för polarimetriska mätningar med radar, följd av en genomgång av existerande teori för elektromagnetisk vågutbredning genom medier, som antas bestå av ett eller flera homogena skikt av olika material, inkluderande väggmaterial. Teorin hanterar reflektion och transmission i planparallella skiljeytor mellan väggskikt, som kan vara dämpande, och tillämpas på en flerskiktsvägg för att studera hur polarisationen ändras genom väggpassagen.

Huvuddelen av rapporten består av en översikt ur ett polarisationsperspektiv av kunskapsläget rörande mål- och bakgrundsinteraktion, som en radarvåg upplever efter väggpassagen. Översikten redogör för teoretiskt framtagna metoder för optimering av målreturer eller av kontraster mellan mål och konkurrerande bakgrund, genom lämpligt val av antennpolarisation vid sändning och mottagning. En viktig kontrastökande metod som samtidigt utnyttjar polarisation och dopplereffekten för rörliga målobjekt beskrivs.

I rapporten refereras två internationella gruppers arbeten med simuleringar och mätningar, som tillämpar en del av de nämnda metoderna. Den ena gruppen har med simuleringar speciellt studerat den aktuella tillämpningen, att observera ett mänskligt målobjekt genom en vägg. Den andra gruppen har utvecklat teori för dopplerpolarimetrisk analys, och tillämpat den vid mätningar, dock i en annan tillämpning.

Översikten har inte påträffat någon utförd radarmätning med full polarimetrisk kapacitet i den aktuella tillämpningen. I ett förslag till fortsatt FOI-arbete framhävs vikten av att skaffa utrustning med sådan förmåga t.ex. genom komplettering av existerande mätutrustning vid FOI:s mätplats Lilla Gåra.

Rapporten innehåller ett längre appendix med allmän polarisationsteori.

Nyckelord: ”Se-igenom-vägg”, radar, polarisation, vågutbredning, reflektion, transmission, dämpning, väggpenetration, urban, stridsfältsovervakning

Summary

The report is a study of the properties and possible applications of electromagnetic polarisation in penetrating radar in urban scenarios. First, the principles of polarimetric measurements with radar are described, followed by a section describing the existing theory of electromagnetic wave propagation through media consisting of one or more homogeneous layers of various materials, including wall material. The theory handles reflection and transmission at the plane-parallel surfaces that separate the layers, which can be attenuating, and is applied to a multi-layered wall to study how the polarisation is transformed by the propagation through the wall.

The main part of the report consists of an overview from a polarisation perspective of current views about the interaction of a radar wave with targets and background, after its passage through the wall. The overview gives an account of theoretical methods for optimization of target returns, or of contrasts between targets and backgrounds, by proper choice of the antenna polarisation on transmit and receive. An important method for improving contrast by the combined use of polarisation and the Doppler shift for moving objects is described.

An account is given of the work of two international groups, consisting of simulations and measurements, where some of the mentioned methods are applied. One group has specifically studied by simulations the application at hand, *viz.* to observe a human target through a wall. The other group has developed theory for Doppler-polarimetric analysis, and applied it in measurements, however in another application.

In the overview, no reported radar measurement has been found with full polarimetric capacity in the see-through application. In a proposal for a continuation of the FOI work the importance to acquire equipment with this capacity is stressed *e.g.* as an added facility to the existing measurement equipment on the FOI test ground at Lilla Gåra.

The report contains an extensive appendix with general polarisation theory.

Key words: "See-through-the-wall", radar, polarisation, wave propagation, reflection, transmission, attenuation, wall penetration, urban, battlefield surveillance

Innehåll

1. INLEDNING	7
2. SCENARIO; POLARIMETRISK MÄTMETODIK	8
2.1. SCENARIO	8
2.2. POLARIMETRISK MÄTNING MED DATABEHANDLING; GRUNDPRINCIPER	8
2.3. DYNAMISKT ÄNDRINGSBAR POLARISATION	10
2.4. POLARIMETRISK KALIBRERING	11
3. VÄGGINTERAKTION	12
3.1. INLEDNING	12
3.2. MONOKROMATISKA, PLANA VÅGOR	12
3.2.1. <i>Maxwells ekvationer</i>	12
3.2.2. <i>Komplex representation</i>	13
3.2.3. <i>Plan våg</i>	13
3.3. FÖRLUSTFRITT MEDIUM	16
3.3.1. <i>Homogena plana vågor</i>	16
3.3.2. <i>Inhomogena plana vågor i förlustfria, isotropa material</i>	17
3.4. HOMOGENA OCH INHOMOGENA PLANA VÅGOR I ISOTROPA MEDIER MED FÖRLUSTER	19
3.4.1. <i>Allmänna egenskaper</i>	19
3.4.2. <i>Homogena dämpade vågor</i>	21
3.4.3. <i>Inhomogena dämpade vågor</i>	23
3.4.4. <i>Polarisationsegenskaper hos harmoniska, inhomogena, plana vågor</i>	24
3.5. REFLEKTION OCH TRANSMISSION	26
3.5.1. <i>Riktningförändringar vid reflektion och transmission</i>	26
3.5.1.1. Randvillkor för fältstyrkorna	26
3.5.1.2. Plan skiljeyta	28
3.5.1.3. Generaliserad Snells lag	29
3.5.2. <i>Reflektions- och transmissionskoefficienter</i>	33
3.5.2.1. Generaliserade Fresnels lagar	33
3.5.2.2. Specialfall: homogen plan våg mot skiljeyta mellan förlustfria medier	37
3.6. EXEMPEL: GRÄNSYTA MELLAN IDEALT DIELEKTRIKUM OCH DIELEKTRISKT MEDIUM MED FÖRLUSTER	40
3.6.1. <i>Inhomogena plana vågor</i>	40
3.6.2. <i>Longitudinellt fält</i>	41
3.6.3. <i>Brewstervinkeln</i>	42
3.7. EXEMPEL: POLARISATIONSTRANSFORMATION VID MÅLOBJEKT BAKOM FLERSKIKTSVÄGG	43
3.7.1. <i>Vågutbredning i flerskiktsmedium</i>	43
3.7.2. <i>Om beräkningarna</i>	45
3.7.3. <i>Reflektion mot halvoändlig vägg</i>	45
3.7.4. <i>Enskiktsvägg</i>	46
3.7.5. <i>Flerskiktsvägg</i>	48
3.7.6. <i>Sammanfattning</i>	49
3.8. EXEMPEL: EFFEKTTRANSMISSION GENOM BETONGSKIKT	50
4. MÅL- OCH BAKGRUNDSINTERAKTION	52
4.1. INLEDNING	52
4.2. OPTIMERINGSTEORI	52
4.2.1. <i>Fixa scheman</i>	52
4.2.1.1. Ortogonala sändar/mottagar-polarisationer	52
4.2.1.2. Polarisationsdifferens	53
4.2.2. <i>Adaptiva scheman</i>	53
4.2.2.1. Spänningsekvationen	53
4.2.2.2. Monostatiskt fall; tidskonstant mål; <i>con</i> -egenvärdesekvationen	54
4.2.2.3. Kontrasthöjning med spridningsmatrisformulering; konstanta mål	55
4.2.2.4. Tidsvariabla mål; kontrasthöjning med Stokesvektorformalism	55

4.2.2.5.	Kontrasthöjning med kovariansmatrisformulering; stokastiskt (tidsvariabelt) fall ..	56
4.2.2.6.	Optimering baserad på flera kontrastmått.....	58
4.2.2.7.	Kontrasthöjning med dopplerpolarimetri.....	59
4.3.	SPECIFIKA STUDIER	60
4.3.1.	<i>Adaptiv metod med gruppantenn</i>	60
4.3.1.1.	Kommentarer till Pennsylvaniagruppens arbete	67
4.3.2.	<i>Dopplerpolarimetri</i>	67
4.3.2.1.	Inledning.....	67
4.3.2.2.	Generalisering av radarvåg- och målbegrepp till tidsvariabla fall	68
4.3.2.3.	Koherensmatrisen för en våg.....	68
4.3.2.4.	Dopplerpolarimetri baserad på koherensmatrisen.....	68
4.3.2.5.	Kovariansmatrisen för ett mål	70
4.3.2.6.	Måluppdelning av sammansatta mål med dopplerpolarimetri; entropibegreppet	71
4.3.2.7.	Koppling mellan doppler- och polarisationsegenskaper	72
4.3.2.8.	Undertryckning av bakgrundsklotter med korrelationsanalys.....	73
4.3.3.	<i>Simuleringar av människa i rum</i>	74
5.	SAMMANFATTNING	76
5.1.	INLEDNING	76
5.2.	VÄGGINTERAKTION	76
5.3.	MÅL- OCH BAKGRUNDSINTERAKTION.....	76
5.3.1.	<i>Fixa polarisationsval</i>	76
5.3.2.	<i>Metoder för optimering av returer och kontraster</i>	77
5.3.3.	<i>Specifikt arbete 1: Adaptiv bildalstring baserad på polarisationsdifferens</i>	77
5.3.4.	<i>Specifikt arbete 2: Dopplerpolarimetri</i>	78
6.	FORTSATT ARBETE	80
APPENDIX A.	Polarisationsteori	81
A.1.	INLEDNING	81
A.2.	ÄMNESÖVERSIKT	81
A.3.	POLARISATIONEN HOS EN VÅG OCH DESS TRANSFORMATION	82
A.3.1.	<i>Vågpolarisering</i>	82
A.3.2.	<i>Målspridning, en polarisationstransformation</i>	82
A.4.	KOHERENT VÅGBESKRIVNING (FÄLTSTYRKA)	84
A.4.1.	<i>Vågen: Jones vektor</i>	84
A.4.2.	<i>Målet: spridningsmatrisen</i>	84
A.4.3.	<i>Målkarakterisering med optimala polarisationer och nollpolarisationer</i>	85
A.4.3.1.	Bestämning av de karakteristiska polarisationerna	88
A.4.3.2.	Polarisationsrepresentation med Poincarésfären.....	88
A.4.3.3.	Huynens polarisationsgaffel	89
A.4.4.	<i>Korrelationer</i>	90
A.4.5.	<i>Vektorisering av spridningsmatrisen: målets koherens- och kovariansmatris</i> 90	
A.4.5.1.	Vektorisering med Paulis spinmatriser: målets koherensmatris	90
A.4.5.2.	Vektorisering med lexikografiskt numrerade basmatriser: målets kovariansmatris. 94	
A.4.5.3.	Kovariansmatrisen vid tidsvariabla mål; spektral formulering	95
A.4.5.4.	Vektorisering med allmän bas	97
A.5.	INKOHERENT VÅGBESKRIVNING (EFFEKT).....	97
A.5.1.	<i>Vågen: Koherensmatrisen</i>	97
A.5.2.	<i>Vektorisering av koherensmatrisen: Stokes vektor</i>	98
A.5.3.	<i>Polarisationsgrad</i>	99
A.5.4.	<i>Målet: Mueller- och Kennaughmatriserna</i>	100
A.6.	NÅGRA ENKLA REFLEKTORER; MÅLUPPDELNINGSTEORIER FÖR KOMPLEXA SPRIDARE 105	
A.6.1.	<i>Några enkla reflektors polarisationsegenskaper</i>	105
A.6.2.	<i>Måluppdelning</i>	105
A.6.3.	<i>Cloudes egenvektorbaserade uppdelning; målentropi</i>	107
A.6.3.1.	Sammansatta, rörliga mål	110
A.6.4.	<i>Koherenta måluppdelningar</i>	111
REFERENSER		113

1. Inledning

Ett penetrerande radarsystem skall ha förmåga att observera en målscen bakom skymmande skikt av något slag, i den urbana miljön främst väggar. Ett skikt åstadkommer generellt reflektion av en infallande våg, samt dämpning och fasändring av den del som transmittas genom skiktet. Detta distorderar eventuella målreturer i radarsignalen. Bortom skiktet, i själva målområdet, sprids vågen i objekt som kan utgöras av målobjekt, men också av bakgrundsobjekt, t.ex. möbler, som alstrar oönskad ”klotter”-retur.

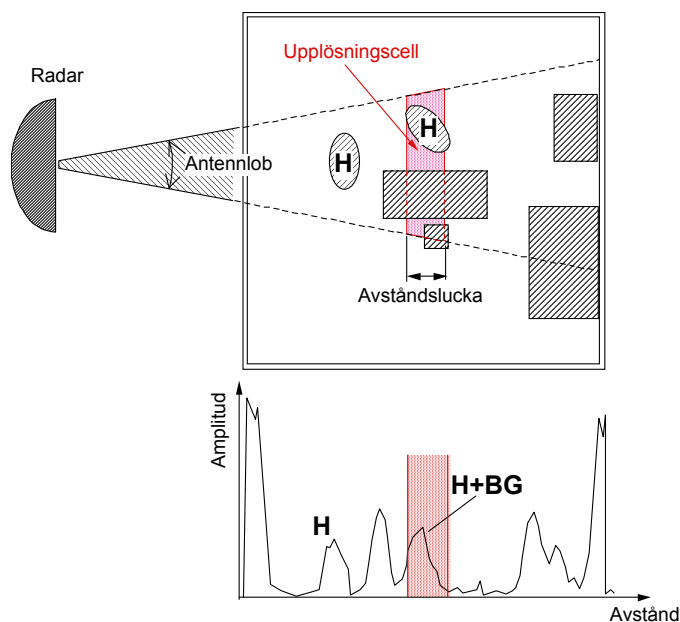
För att reducera effekterna av nämnda distorsioner och störningar och för att framhäva själva målsignaturerna, måste ett radarsystem utnyttja de olika möjligheter, som bjuds av fysiken. Främst utnyttjar man i detta fall bl.a. avstånd och rörelse (dopplereffekt) i diskrimineringssyfte, och vid bildalstring även form. En storhet som endast i begränsad utsträckning studerats i se-igenom-tillämpningen är radarvågens polarisation, d.v.s. den elektriska fältstyrkans egenskap att vara en riktad storhet. Riktningen utgör en potentiell informationskälla om vågen och dess interaktion med omgivande objekt, som bl.a. öppnar en ytterligare möjlighet för mål/bakgrunds-diskriminering. Inom andra radartillämpningar, främst fjärranalys med SAR (Syntetisk Apertur-Radar), har denna potential studerats och utnyttjats under mer än ett decennium.

Denna rapport utgör en studie av polarisationens egenskaper och möjliga användning i se-igenom-tillämpningen. Den utgör en genomgång av kunskapsläget om radarpolarimetri, med relevans för vår tillämpning. Från den så givna översikten drar rapporten slutsatser och ger rekommendationer för hur ett fortsatt polarimetriarbete vid FOI skall inriktas, speciellt experimentellt, där behovet känns mest angeläget.

2. Scenario; polarimetrisk mätmetodik

2.1. Scenario

Figur 2.1 visar ett enkelt scenario, som kan utgöra bakgrund för en inledande diskussion om observation genom vägg med en polarimetrisk radar. En sådan radar har förmågan att koherent sända och ta emot i olika polarisationer med kontroll och registrering av fasen förutom amplituden. Figuren avser att visa svårigheten för en konventionell radar, som arbetar med en enda, fix polarisation. Radarn belyser en rumsvägg från vänster. Man kan grovt se tre slags interaktioner mellan radarvågen och olika objekt, som den stöter på: den närmaste väggen, de båda människorna (H) som utgör de intressanta målobjekten, samt bakgrundsobjekten i rummet (möbler). En skiss av den mottagna radarreturen som funktion av tiden visas i den undre delfiguren. I den utgörs varje amplitudsampel av summan av radarreturerna inom radarns upplösningcell. Cellerna är begränsade i sidled av antennloben och i djupled av avståndsupplösningen, som avgörs av signalformen. I den visade upplösningcellen (röd) konkurrerar radarreturen från humanobjektet (H) med returen från bakgrunden (BG). De bildar en gemensam topp i registreringen, som man inte enbart med hjälp av denna registrering kan dela upp i komponenter. En huvuduppgift i arbetet har varit att se om ytterligare polarisationskanaler ger en möjlighet att få en kontrast mellan returerna från mål- och bakgrund, genom att de uppvisar olika slags interaktionsmönster.



Figur 2.1. Principfigur över enkelt scenario (överst) med radar riktad mot rumsvägg, bakom vilken befinner sig två människor (H) samt stationära inventarier. Nederst visas radarreturen från radarns synfält. Se texten för närmare beskrivning.

2.2. Polarimetrisk mätning med databehandling; grundprinciper

Det man generellt strävar efter är en uppmätning av de fyra elementen i ett måls spridningsmatris (se Appendix A, avsnitt A.4.2). Mätningen tillgår så att man sekventiellt sänder ut två ortogonalt polariserade vågor och tar emot respektive retur när den anländer, men i två parallella kanaler. Utsändningen måste ske separerat i tiden så att man inte får en sammanblandning av signaler, som omöjliggör en bestämning av de enskilda komponenterna i spridningsmatrisen. I detta avsnitt beskrivs hur en sådan mätning kan gå till.

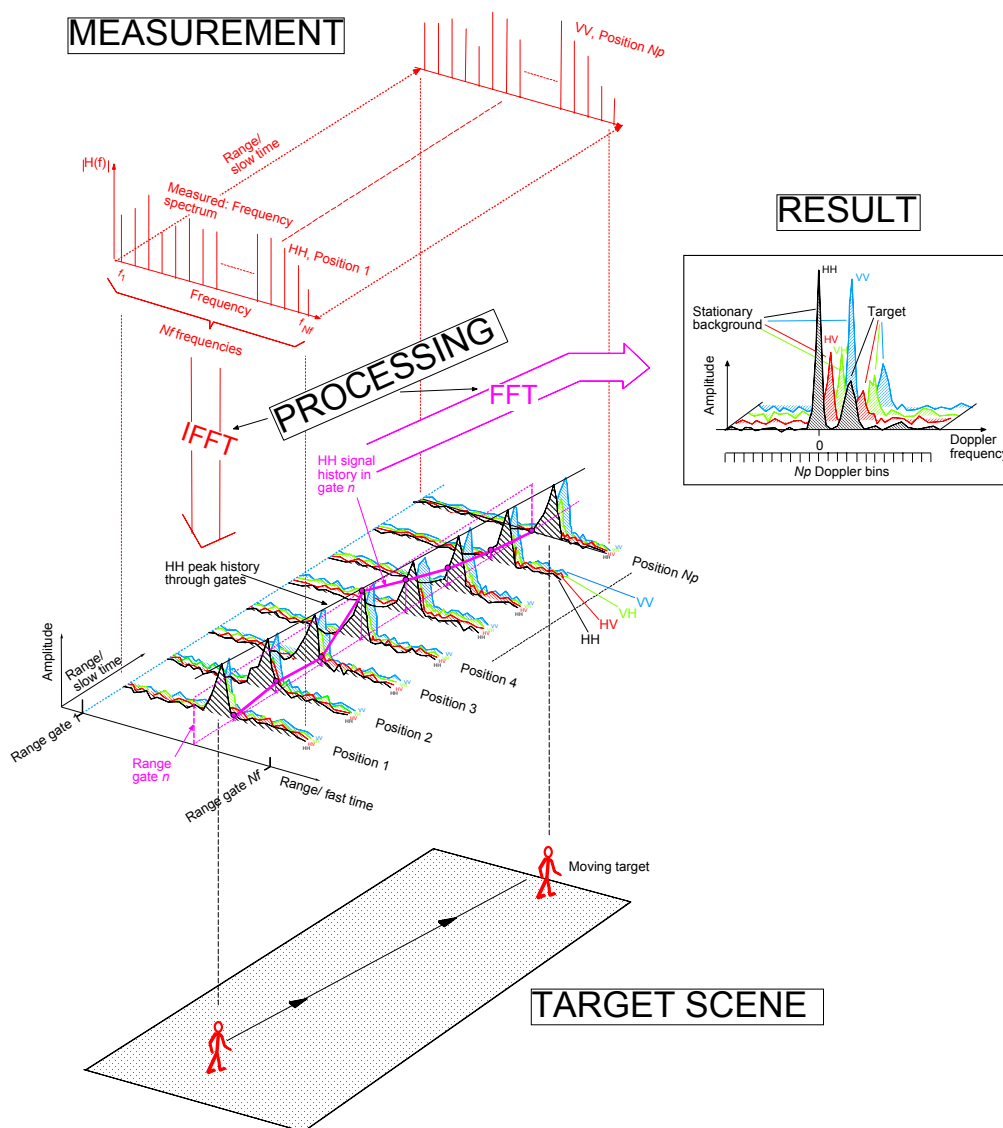
För diskussionens skull begränsar vi oss till frekvensstegad radar, där man koherent sänder ut en följd av långa tidsgrindade sinussignaler, med frekvensstegning om Δf mellan varje utsändning i följden, så att man täcker ett totalt frekvensintervall B . I tidsplanet (efter invers fouriertransformering) motsvarar den utsända följden en pulssignal, med en avståndsupplösning $\Delta R = c/(2B)$, där c är ljushastigheten. Returen från varje utsänd sinusformad delsignal utgörs av summan (likaledes sinusformad) av delreturer från objekt i radarns observationsriktning, som samplas i en lämpligt vald tidpunkt. De samplade returena från den utsända följden ger efter (invers) fouriertransformering en i tiden utsträckt puls, eller efter omskalning av tidsaxeln radarreturen som funktion av avståndet, en s.k. avståndsprofil i den observerade riktningen. Amplituden av en sådan profil visas av den nedre skissen i Figur 2.1. Den beskrivna principen med frekvensstegning har använts vid FOI vid de genomförda se-genom- och se-runt-hörn-mätningarna på Lilla Gåra mätplats (se t.ex. Sume m.fl., 2008). Endast en fix, linjär polarisation (vertikal) användes vid dessa mätningar.

Fasinformationen (dopplerförskjutning) från rörliga mål har visat sig vara mycket användbar för detektion av dessa mål. Människor utgör den viktigaste måltypen i denna grupp i se-igenom-tillämpningen, varför vi här närmare skall beskriva ett möjligt insamlings- och processeringsförfarande, som utgörs av det standardförfarande vid doppleranalys av mänskliga mål, som bl.a. utnyttjats vid nämnda FOI-mätningar, men här kompletteras med den polarimetriska dimensionen.

Figur 2.2 visar en principskiss av de olika beskrivna utsända och mottagna signalformerna i en polarimetrisk radar i ett fall då man observerar ett rörligt mål. I det fullpolarimetriska fallet har man inte en, utan fyra mottagna signaler, svarande mot de totalt fyra kombinationerna utsänd/mottagen polarisation, t.ex. Horisontell/Horisontell (HH), Horisontell/Vertikal (HV), Vertikal/Horisontell (VH), Vertikal/Vertikal (VV), i den kanske mest använda linjära polarisationsbasen. Varje signal är dessutom komplex, d.v.s. innehåller information om amplitud och fas. I FOI:s mätstations Lilla Gåra nuvarande system används två mottagarkanalerna för denna information, en s.k. I- och en Q-kanal (efter *In-phase*, och *Quadrature-phase*). Med bibehållande av ett sådant utförande skulle kanalantalet uppgå till fyra, i stället för nuvarande två.

Man noterar i Figur 2.2 att det finns två tidsaxlar utritade. De representerar tidsskalor av olika storleksordning. Den som erhålls efter den första fouriertransformeringen (invers) från frekvensspektrum till avståndsprofiler representerar s.k. snabb tid, associerad med den elektromagnetiska vågutbredningens hastighet (c). Den andra tidsskalan mäter den s.k. långsamma tiden, förknippad med målets mekaniska förflyttning med någon hastighet $v \ll c$. Den används vid den andra fouriertransformeringen, som producerar ett dopplerspektrum från integrationen av ett mål i en viss avståndslucka. Det är på den tidsskalan som man analyserar doppleregenskaperna.

Varje frekvenssvep över bandbredden B upprepas två gånger i snabb följd, med ändring mellan svepen av utsänd polarisation genom elektronisk omkoppling. Mottagningen sker som beskrivet i två ortogonalt polariserade kanaler, som vardera är uppdelad i en I- och en Q-kanal. Avsikten är att man genom dessa mätningar skall kunna bestämma de fyra elementen i spridnings- (=polarisations-) matrisen för objekten som funktion av avstånd i radarns blickfält, idealt för en och samma tidpunkt, med början i den tidpunkt, då det intressanta målobjektet befinner sig i position 1 i figuren. Processen upprepas periodiskt i senare tidpunkter (mätt i långsam tid), valda med lämpligt tidsavstånd (samplingsfrekvens) så att målobjektets rörelse kan följas kontinuerligt och entydigt genom följande positioner 2, 3, etc. För att undvika mångtydighet krävs att faser i varje avståndslucka ändras med mindre än π , mellan två samplings i långsam tid.



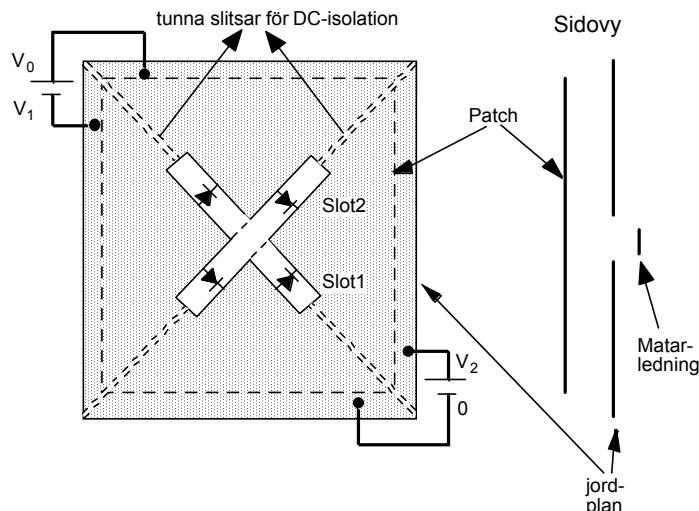
Figur 2.2. Exempel på koherent, polarimetrisk uppmätning av ett rörligt mål (nederst). Överst visas insamlade frekvensdomändata, som erhållits genom sändning och samplad mottagning över ett bestämt frekvensintervall och i de fyra kombinationerna utsänd/mottagen polarisation, HH, HV, VH, VV. Doppleranalysen sker genom två fouriertransformer. Den första (invers transform, IFFT) skapar avståndssprofiler i de fyra polarisationerna (mittfiguren). Den andra (FFT) bildas separat för varje avståndslucka, vilket för varje polarisationskombination ger ett dopplerspektrum (delfiguren till höger). Se texten för ytterligare detaljer.

Här bör nämnas att man kan använda alternativa kombinationer av sänd/mottagen polarisation än de fyra linjära som nämnts här. Raney (2007, 2008, 2009) har presenterat alternativ som är informationsmässigt ekvivalenta, t.ex. där man växlar mellan höger- och vänster cirkulär polarisation vid sändning, och mottar koherent ortogonala linjärpolarisationer.

2.3. Dynamiskt ändringsbar polarisation

Antennernas polarimetriska egenskaper avgör vilken polarisation som sänds ut mot målområdet, och som levereras tillbaka till mottagaren för vidare analys. Antennerna utgör alltså nyckelkomponenter i radarsystemet. En allmän översikt av möjliga antenntyper i se-igenom-tillämpningen gavs av Sume (2007), där dock polarisationen inte utgjorde något huvudtema. Här skall tilläggas att den tekniska utvecklingen inom halvledartekniken, radiofrekventa mikro-elektromekaniska system (RF MEMS), optisk styrning etc., har öppnat möjligheten att använda polarisationsrörliga antenner (*polarisation-agile*), vars

polarisationstillstånd kan ändras dynamiskt (se översikten av Gao m.fl., 2006). Ett enda exempel ges här, i Figur 2.3, som visar en 5 GHz-antenn som kan kopplas om mellan höger och vänster cirkulärpolarisation.



Figur 2.3. Exempel på antenn med dynamiskt ändringsbar polarisation i form av en 5 GHz patchantenn, omkopplingsbar medelst PIN-dioder mellan höger och vänster cirkulär polarisation. Vänstra figurdelen visar jordplanet med två par PIN-dioder insatta i vardera kopplingsslitsen. Högra figurdelen är en sidovy av antennstrukturen, där patchen kopplas till matarledningen genom den korsade slitsen i jordplanet. Genom att via biasspänningarna få ett diodpar ledande och det andra oledande åstadkommer man en cirkulärpolarisation, antingen höger eller vänster. Biasisolering erhålles genom att man använder tunna slitsar täckta med MIM- (metall-isolator-metall) kapacitanser så att jordplanet delas upp i fyra sektioner. En cirkulärpolarisationsbandbredd om 4% har uppnåtts med utförandet. (Efter Boti m.fl., 2000; Gao m.fl. 2006).

2.4. Polarimetrisk kalibrering

För polarimetriska mätningar krävs polarimetriska kalibreringar. Vid FOI har sådana utförts på 94 GHz, med användning av referensreflektorer (Johansson och Sume, 2001). Metoden kräver i sin allmännaste form tre kalibreringsmätningar: en mätning mot en sfär (alternativt plan platta eller trieder) och två mot en trieder med olika lutningsvinklar i förhållande till horisontalriktningen. Därur bestämmer man hur systemet distorderar polarisationen vid sändning och mottagning. Om sändar- och mottagardelarna har lika, symmetriska transformationsegenskaper reduceras kravet på oberoende mätningar till en enda, t.ex. mot en trieder.

3. Vägginteraktion

3.1. Inledning

En översikt av teorin för utbredningen av en plan våg, som faller in mot planparallella skikt av olika material, gavs i projektet av Sume och Nilsson (2008). Med tillämpning av teorin gavs bl.a. exempel på reflektions-, transmissions- och absorptionsegenskaperna hos olika väggmaterial. I föreliggande rapport är fokus på polarisationsegenskaperna.

Detta kapitel innehåller en mer utförlig genomgång av den grundläggande teorin för elektromagnetisk vågutbredning genom en vägg, med fokusering på hur vågens polarisation transformeras av väggpassagen. Behandlingen är begränsad till väggar, som består av ett eller flera planparallella, homogena skikt. Skikten antas alla bestå av isotropa material, d.v.s. material med egenskaper som är riktningsoberoende. Därmed behandlas inte t.ex. armerade väggar eller träväggar med fibrer. Genomgången innefattar en framtagning av Fresnels lagar för reflektion och transmission vid en plan skiljeyta mellan två medier av nämnt slag. De ingående vågorna antas plana, men i övrigt allmänna rörande polarisation, utbredningsriktning och homogenitet. Det senare begreppet kommer att definieras i kommande avsnitt.

Det kan tyckas onödigt att här behandla ett ämnesområde som ingår i praktiskt taget alla standardverk om elektromagnetisk vågutbredning som t.ex. Stratton (1941), Chen (1983), Kong (1986), Born och Wolf (1999), Jackson (1999), Kristensson (1999). Men även om dessa tar fram formelunderlag för vektoriell vågutbredning i medier och genom skiljeytor mellan medier av intresse här, saknas detaljerad genomgång av de fenomen som kan uppträda i det allmänna fallet i vår tillämpning. Såsom Whitaker (1979) påpekat lider dessutom flera standardreferenser av oklarheter rörande detaljer i analysen. Han fann att behandlingen kunde förbättras speciellt för dielektriska medier med (måttlig) ledningsförmåga med tillhörande förluster. Just detta fall är praktiskt betydelsefullt, t.ex. en betongvägg.

I det allmänna planvågsfallet med godtyckligt polariserade, harmoniska, inhomogena plana vågor är vågutbredningen genom skiljeytan mellan två absorberande medier, av hög komplexitet, och det är först relativt nyligen som problemet har utretts fullständigt. Den enligt Chang m.fl. (2005) definitiva framställningen tycks vara av Dupertuis m.fl. (1994), som klarlade några punkter rörande vågutbredningen och pekade ut brister i tidigare arbeten. Detta allmänna fall kräver en generalisering av Snells¹ och Fresnels lagar. Vår framställning nedan kommer att behandla Dupertuis m.fl. (1994) resultat, delvis efter Chang m.fl. (2005). Den föregås av en grundläggande genomgång av vågutbredningen av plana vågor i homogena, isotropa, absorberande dielektriska medier, där vi i stort sett följt Chen (1983). En strävan har varit att ta fram ett formelunderlag som skall vara fysikaliskt tolkningsbart, varför i möjligaste mån komplexa riktningsmått (vinklar, vektorer) har undvikits, även om en sådan framställning är fullt möjlig och används i flera nämnda verk. Vid framtagningen av generaliserade fresnelska lagar har vi dock följt Dupertuis m.fl. (1994) och infört komplexa basvektorer, vilket ger en ekonomisk framställning.

3.2. Monokromatiska, plana vågor

3.2.1. Maxwells ekvationer

Vi ger en grundläggande genomgång för vågutbredningen i ett medium, med medieparametrar som senare kommer till användning i texten. Den är huvudsakligen baserad på framställningen av Chen (1983), som karakteriseras att vara koordinatsystemfri.

Basen för framställningen är Maxwells ekvationer (se t.ex. Kristensson, 1999),

¹ Willebrord Snel van Royen (1580-1626), latiniserat Willebrord Snellius, oftast benämnd Willebrord Snell.

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (3.1d)$$

I dessa ekvationer är

$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ elektrisk fältstyrka [V/m] resp. magnetisk flödestäthet [Vs/m²].

$\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ elektrisk flödestäthet [As/m²] resp. magnetisk fältstyrka [A/m].

$\mathbf{J}$, ρ strömtäthet [A/m²] resp. laddningstäthet [Coulomb/m³], associerade med "fria" laddningar.

För t.ex. bestämning av randvillkor är det lämpligt att ha ekvationerna på integralform. Integrera (3.1a) resp. (3.1b) över en yta S , vars rand utgörs av kurvan C , och använd Stokes' teorem i vektoranalysen. Då fås

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2a)$$

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2b)$$

där $d\mathbf{S}$ är en infinitesimal vektorarea på ytan S och $d\mathbf{l}$ är en differentiell vektorlängd. Integralerna med cirkel i vänsterleden anger integration över den slutna kurvan, där konventionen används att $d\mathbf{l}$ går runt $d\mathbf{S}$ enligt högerskruvregeln.

På samma sätt, integrera (3.1c) resp. (3.1d) över en volym V , innesluten i en begränsningsyta S och använd divergensteomet i vektoranalysen. Då fås

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3.3a)$$

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (3.3b)$$

3.2.2. Komplex representation

Ett allmänt tidsharmoniskt fält $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ har formen (Kristensson, 1999)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t, \quad (3.4)$$

där $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ är reella tidsberoende vektorfält. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ kan skrivas som realdelen av en komplex vektor

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}e^{-i\omega t}), \quad (3.5)$$

där $\mathbf{E} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$, för vilken vi använt samma symbol som för det fysikaliska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i vänsterledet. Storheten $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ är en komplex representation av det reella fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Ofta underförstås exponentialfaktorn, och man kallar då $\mathbf{E}$ den komplexa representationen.

3.2.3. Plan våg

Den komplexa vektorns $\mathbf{E}$ kartesiska komponenter är komplexa funktioner av $\mathbf{r}$ och vi ansätter

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.6)$$

Här är $\mathbf{E}_0$ en komplex, konstant amplitudvektor och den konstanta vektorn $\mathbf{k}$ kallas vågvektorn. Vi antar först (fram till Avsnitt 3.3.2) att $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ är reell och kallar k vågtalet, och enhetsvektorn $\hat{\mathbf{k}}$ vågnormalen. Vi skall ge en fysikalisk tolkning av storheten $\mathbf{k}$.

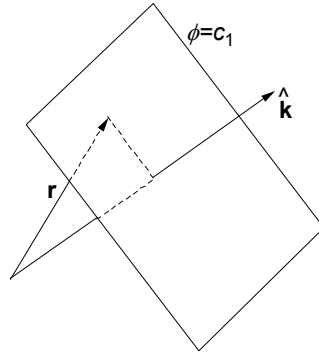
Uttrycket (3.5) är en konstant vektor då fasen

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (3.7)$$

är en konstant. Då är

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \zeta = \frac{c_1 + \omega t}{k}, \quad (3.8)$$

vilket är ekvationen för ett plan i tredimensionella rummet. För ett givet t är ytan för konstant fas, definierad av $\phi = c_1$, ett plan vinkelrätt mot enhetsvektorn $\hat{\mathbf{k}}$ och befinner sig på ett avstånd ζ från origo enligt Figur 3.1.



Figur 3.1. Homogen plan våg som utbreder sig i riktningen $\hat{\mathbf{k}}$.

Då t växer, måste också ζ växa och planet som definieras av (3.7) rör sig i riktningen $\hat{\mathbf{k}}$. Fältet kallas en *plan våg*. Det är också en *homogen* plan våg, eftersom på planet med konstant fas är också vågens amplitud konstant. Om vi deriverar (3.8) med avseende på t fås

$$v_p = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega}{k}, \quad (3.9)$$

och vektorn

$$\mathbf{v}_p = v_p \hat{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}, \quad (3.10)$$

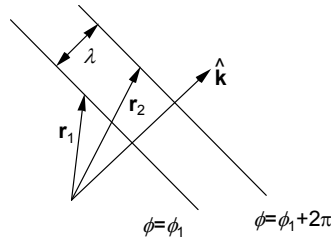
kallas vågens fashastighetsvektor.

Avståndet mellan två plan med konstant fas, vilkas fasskillnad är 2π radianer, kallas våglängden λ . Om $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ är positionsvektorer för punkter på den första respektive andra ytan med konstant fas (Figur 3.2) fås

$$2\pi = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = k\lambda, \quad (3.11)$$

d.v.s.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (3.12)$$



Figur 3.2. Två plan med konstant fas, som skiljer sig med 2π mellan planen.

Ibland är det bekvämt att använda vektorn

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} . \quad (3.13)$$

Beloppet av denna vektor,

$$n = \frac{ck}{\omega} = \frac{k}{k_0} , \quad (3.14)$$

kallas *brytningsindex* och riktningen hos $\mathbf{n}$ sammanfaller med vågnormalen $\hat{\mathbf{k}}$. Storheten

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} , \quad (3.15)$$

är vågtalet i vakuum.

Vi skall nu undersöka under vilka villkor, som den monokromatiska vågen uppfyller Maxwells ekvationer, som i komplex form, i frekvensdomänen, lyder (Kristensson, 1999),

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} , \quad (3.16a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} , \quad (3.16b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (3.16c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (3.16d)$$

där $\mathbf{H}$ är magnetiska fältstyrkan, $\mathbf{B}$ är magnetiska flödestätheten, $\mathbf{D}$ är elektriska flödestätheten, $\mathbf{J}$ är strömtätheten, ρ är elektriska laddningstätheten. Dessa är, i det allmänna fallet, funktioner av $\mathbf{r}$ och ω . Vi antar här ett källfritt område.

Eftersom fältvektorerne är linjärt relaterade genom Maxwells ekvationer, måste alla ha samma rumsvariation, $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, som $\mathbf{E}$. Vidare gäller

$$\nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} , \quad (3.17)$$

och

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\nabla \times \mathbf{E}_0) + (\nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 \\ &= (\nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times \mathbf{E}_0 = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Om man substituerar (3.6) och liknande uttryck för $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ och $\mathbf{B}$ i de maxwellska ekvationerna (3.16) i ett källfritt område, d.v.s. med $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$, och använder (3.17) och (3.18) fås

$$\omega \mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 , \quad (3.19a)$$

$$\omega \mathbf{D}_0 = -\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 , \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 . \quad (3.19c)$$

Alltså måste de komplexa, konstanta amplitudvektorerne $\mathbf{E}_0, \mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{B}_0$ (eller $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$) vara relaterade genom (3.19a-c) för att den monokromatiska plana vågen enligt (3.6) skall vara en lösning till Maxwells ekvationer.

3.3. Förlustfritt medium

3.3.1. Homogena plana vågor

Vi betraktar det specifika fallet med ett förlustfritt, isotropt medium. För ett sådant medium antar de konstitutiva relationerna följande form (Kristensson, 1999)

$$\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_0, \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0, \quad (3.20b)$$

där ε_0, μ_0 är vakuums dielektricitets- resp. permeabilitetskonstant, och ε_r, μ_r är mediets relativa dielektricitets- resp. permeabilitetskonstant, som är reella tal för det antagna mediet. Om vi sätter in (3.20) i (3.19) och eliminerar antingen $\mathbf{H}_0$ eller $\mathbf{E}_0$ från de erhållna ekvationerna, fås

$$(n^2 - \mu_r \varepsilon_r) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.21a)$$

$$(n^2 - \mu_r \varepsilon_r) \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.21b)$$

Dessa båda homogena ekvationer har lösningar $\mathbf{E}_0$ resp. $\mathbf{H}_0$, skilda från noll, enbart om

$$n^2 = \mu_r \varepsilon_r, \quad (3.22)$$

eller

$$k^2 = k_0^2 \mu_r \varepsilon_r = \frac{\omega^2 \mu_r \varepsilon_r}{c^2}, \quad (3.23)$$

där

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}, \quad (3.15)$$

är vågtalet i fri rymd. Relationen (3.23) som relaterar vågtalet k med frekvensen ω kallas *dispersionsrelationen*. I vårt fall har vi

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0), \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\eta (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}_0), \quad (3.24b)$$

där

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}, \quad (3.25)$$

är mediets *vågimpedans*. För att tolka (3.24a) och (3.24b) skriver vi relationerna i tidsdomänen

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)), \quad (3.26a)$$

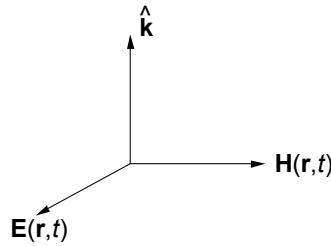
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\eta (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)), \quad (3.26b)$$

av vilka följer att

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.27)$$

Den monokromatiska plana vågen i ett förlustfritt, isotropt medium är en transversell elektromagnetisk våg, d.v.s. de elektriska och magnetiska fältvektorererna ligger i planet (med konstant fas) vinkelrätt mot vågutbredningsriktningen. Vektorerna $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ och $\hat{\mathbf{k}}$ bildar med andra ord en högerriktad, ortogonal triad av vektorer enligt Figur 3.3. Alltså kan

man för ett givet medium specificera $\omega, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ godtyckligt med $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$. Då följer $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ och k ur resp. (3.26a) och (3.23).



Figur 3.3. Relativa orienteringar hos fältstyrkor och utbredningsriktning.

3.3.2. Inhomogena plana vågor i förlustfria, isotropa material

I föregående avsnitt behandlades homogena plana vågor i förlustfria, isotropa medier. Vi behandlade där bara fallet med en reell vågvektor $\mathbf{k}$. Maxwells ekvationer i sådana medier tillåter emellertid mer generella lösningar. Plana vågor av formen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.28b)$$

kan också uppfylla Maxwells ekvationer för ett förlustfritt isotropt medium när vågvektorn $\mathbf{k}$ är komplex,

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2. \quad (3.29)$$

Här är

$$\mathbf{k}_1 = k_{1x}\hat{\mathbf{x}} + k_{1y}\hat{\mathbf{y}} + k_{1z}\hat{\mathbf{z}} = k_1\hat{\mathbf{e}}, \quad (3.30a)$$

$$\mathbf{k}_2 = k_{2x}\hat{\mathbf{x}} + k_{2y}\hat{\mathbf{y}} + k_{2z}\hat{\mathbf{z}} = k_2\hat{\mathbf{f}}, \quad (3.30b)$$

två reella vektorer i rummet. Vi kallar $\mathbf{k}_1$ fasvektorn och $\mathbf{k}_2$ dämpningsvektorn av skäl som kommer att framgå i det följande.

Insättning av Ekv. (3.28a) och (3.28b) med den komplexa vågvektorn $\mathbf{k}$ i de källfria formerna av de maxwellska ekvationerna (3.16a,b) ger som tidigare (jfr (3.19a,b))

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu_0\mu_r\mathbf{H}_0, \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}_0. \quad (3.31b)$$

Skalär multiplikation av (3.31a) från vänster med $\mathbf{k}$ ger

$$\omega\mu_0\mu_r\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.32)$$

d.v.s.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0. \quad (3.33)$$

På samma sätt ger (3.31b)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0. \quad (3.34)$$

Eftersom $\mathbf{k}, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0$ är komplexa vektorer, implicerar (3.33) och (3.34) inte ortogonalitet i rummet. Eliminering av $\mathbf{H}_0$ från (3.31a) och (3.31b) ger med (3.34)

$$(\mathbf{k}^2 - k_0^2\mu_r\epsilon_r)\mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.35)$$

där $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. För att en lösning $\mathbf{E}_0$ skild från noll skall existera, krävs att den komplexa vågvektorn $\mathbf{k}$ uppfyller dispersionsrelationen

$$\mathbf{k}^2 = k_0^2 \mu_r \varepsilon_r, \quad (3.36)$$

d.v.s.

$$(k_1^2 - k_2^2) + i2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = k_0^2 \mu_r \varepsilon_r. \quad (3.37)$$

Genom att sätta imaginärdelar och realdelar lika mellan de båda leden fås

$$k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 \mu_r \varepsilon_r, \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 0. \quad (3.38b)$$

Villkoren (3.36), (3.31a), (3.31b), (3.33) och (3.34) sammanfattar kraven som ställs av Maxwells ekvationer på den plana vågen av formen (3.28a,b). Om dessa villkor är uppfyllda kommer de plana vågorna att vara lösningar till Maxwells ekvationer i förlustfria isotropa medier.

För att förstå ekvation (3.38b) erinrar vi om uttrycket för den momentana elektriska fältstyrkan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) = \text{Re}[(\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) e^{i\phi_1}] = \frac{1}{2} e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{E}_0 e^{i\phi_1} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\phi_1}), \quad (3.39)$$

där

$$\phi_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (3.40)$$

är vågens fas. En yta med konstant fas i en given tidpunkt definierad av $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}} = \text{konstant}$ är ett plan vinkelrätt mot $\hat{\mathbf{e}}$. Därför kallar vi k_1 *faskonstanten* och enhetsvektorn $\hat{\mathbf{e}}$ *vågnormalen*. Av (3.40) framgår att planet med konstant fas rör sig med fashastigheten

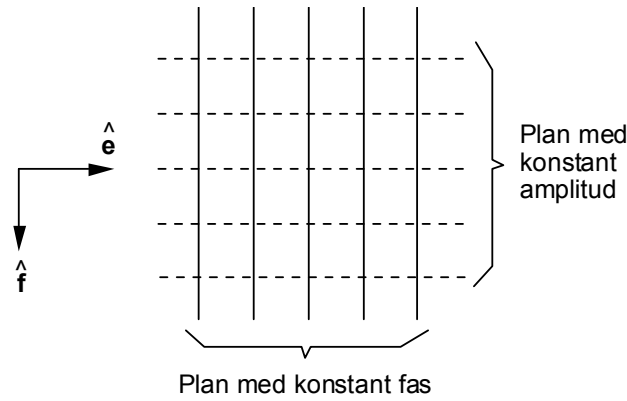
$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k_1} \hat{\mathbf{e}}. \quad (3.41)$$

Vågens amplitudvektor varierar å andra sidan som $\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$. En yta med konstant amplitud, definierad av $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \text{konstant}$, är ett plan vinkelrätt mot $\hat{\mathbf{f}}$. Vi kallar k_2 *dämpningskonstanten* och enhetsvektorn $\hat{\mathbf{f}}$ *amplitudnormalen*. Fältet, som ges av (3.39) är fortfarande en plan våg, eftersom dess ytor med konstant fas utgörs av plan. Men det är inte en homogen plan våg, eftersom vågens amplitudvektor varierar med positionen över planen med konstant fas. Den plana vågen, karakteriserad av den komplexa vågvektorn med $\hat{\mathbf{e}} \neq \hat{\mathbf{f}}$ kallas en *inhomogen* plan våg. För en sådan våg kan fas och amplitud samtidigt vara konstanta enbart längs skärningen mellan plan med konstant fas och amplitud, d.v.s. i riktningen $\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{f}}$.

Villkoret som uttrycks av (3.38b) är att de reella vektorerna $\mathbf{k}_1$ och $\mathbf{k}_2$ är ortogonala i rummet (om $k_1, k_2 \neq 0$). Dessutom gäller att $\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r} > 0$, förutsatt att $\omega \neq 0$, och ekv. (3.38a) ger att $k_1 > k_2$. Då gäller

$$k_1^2 > k_2^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r > 0, \text{ för } \omega \neq 0. \quad (3.42)$$

Med andra ord är fashastigheten med vilken en inhomogen plan våg utbreder sig mindre än fashastigheten med vilken en homogen plan våg utbreder sig i samma medium. Om $\mathbf{k}_2 \neq 0$ gäller allmänt att fältet hos en inhomogen plan våg (3.39) har plan med konstant amplitud (vinkelräta mot $\hat{\mathbf{f}}$) och plan med konstant fas (vinkelräta mot $\hat{\mathbf{e}}$) som är ömsesidigt ortogonala, som visas i Figur 3.4. Vi noterar att Ekv. (3.38a) inte bestämmer k_1, k_2 entydigt och uttrycket (3.39) är fysikaliskt meningsfullt bara i halvrummet $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} > 0$. Sålunda finner man viktiga tillämpningar av inhomogena plana vågor vid randvärdesproblem som fenomenet med intern totalreflektion samt reflektion av vågor från ledande medier. Det senare fallet kommer vi att studera närmare i ett följande avsnitt.



Figur 3.4. Plan med konstant fas resp. med konstant amplitud för en inhomogen plan våg i ett förlustfritt medium är ömsesidigt ortogonala.

3.4. Homogena och inhomogena plana vågor i isotropa medier med förluster

3.4.1. Allmänna egenskaper

Förekomsten av konduktivitet hos ett medium modifierar i viss grad naturen hos den elektromagnetiska vågutbredningen. Återigen kan både homogena och inhomogena plana vågor uppträda. Emellertid skapar det elektriska fältet i ett medium med förluster ledningsströmmar, vilka i sin tur ger upphov till joulska värmeförluster. Dessa minskar energin hos vågen och man kan förvänta sig att amplituden minskar (dämpad våg), då vågen utbreder sig genom mediet. De konstitutiva relationerna för ett homogent isotropt medium med en ändlig konduktivitet är

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (3.43b)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.43c)$$

Här betecknar $\mathbf{J}_c$ ledningsströmtätheten och σ mediets ledningsförmåga (S/m). Övriga storheter är som i (3.16).

Insättning av ovanstående ekvationer i de maxwellska ekvationerna (3.16a,b) ger

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu_r \mathbf{H}, \quad (3.44a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}, \quad (3.44b)$$

där

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r(1 + i\tau), \quad (3.45)$$

är ett komplext dielektricitetsstal, där

$$\tau = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad (3.46)$$

kallas *förlusttangenta* hos mediet, som är kvoten mellan ledningsströmmen och förskjutningsströmmen i ett förlustmedium. Vi söker som tidigare en lösning till (3.44a,b) av formen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.47a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.47b)$$

som har samma form som (3.6), men nu med ett komplext $\mathbf{k}$.

Insättning av (3.47a) och (3.47b) i (3.44a) och (3.44b) ger på samma sätt som vid härledningen av (3.31a) och (3.31b)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0, \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0, \quad (3.48b)$$

vilket implicerar

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.49b)$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.49c)$$

där de båda första relationerna utgör komplexa transversalitet villkor, samt den tredje uttrycker komplex ortogonalitet mellan fältstyrkorna. Detta är emellertid inte liktydigt med att vågorna är rent transversella, eller att $\mathbf{E}(r, t)$ alltid är vinkelrät mot $\mathbf{H}(r, t)$, vilket vi kommer att behandla närmare i Avsnitt 3.4.4.

Eftersom (3.48b) har samma form som (3.31b) för det förlustfria mediet förutom att $\tilde{\varepsilon}_r$ har ersatt ε_r , kan vi direkt skriva upp dispersionsrelationen för ett medium med förluster

$$\mathbf{k}^2 = k_0^2 \mu_r \tilde{\varepsilon}_r, \text{ eller} \quad (3.50a)$$

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r. \quad (3.50b)$$

Efter att ha separerat real- och imaginärdelarna på båda sidor i (3.50a) får man att fasvektorn $\mathbf{k}_1$ och dämpningsvektorn $\mathbf{k}_2$ i den komplexa vågvektorn,

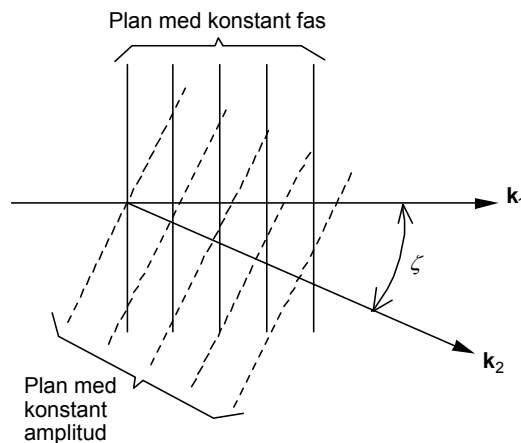
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2, \quad (3.51)$$

uppfyller de båda likheterna

$$\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2 = k_0^2 \mu_r \varepsilon_r, \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = k_1 k_2 \cos \zeta = \frac{1}{2} k_0^2 \mu_r \varepsilon_r \tau, \quad (3.52b)$$

där ζ är vinkeln mellan de båda reella vektorerna $\mathbf{k}_1$ och $\mathbf{k}_2$. Figur 3.5 visar geometrin.



Figur 3.5. Plan med konstant fas resp. med konstant amplitud i ett medium med förluster.

Av Ekv. (3.52a) och (3.52b) framgår att så länge som ω och σ (och därmed τ) är skilda från noll, kan varken k_2 eller k_1 vara lika med noll. Med förluster måste fälten med andra ord undergå såväl dämpning som fasskift i stationärt tillstånd. Under samma förhållanden

måste enligt (3.52b) gälla att $\cos \varsigma \neq 0$. De inhomogena plana vågorna i medier med förluster skiljer sig från fallet i förlustfria medier, eftersom planen med konstant fas och planen med konstant amplitud inte kan vara ömsesidigt ortogonala. Storheterna k_1 och k_2 kan dessutom inte vara negativa eftersom de är belopp av två reella vektorer. Eftersom dessutom μ_r och σ i (3.52b) inte kan vara negativa följer

$$0 < \cos \varsigma \leq 1 \text{ om } \omega > 0, \text{ eller} \quad (3.53a)$$

$$0 \geq \varsigma < \frac{\pi}{2} \text{ om } \omega > 0, \quad (3.53b)$$

såsom är visat i Figur 3.5. Det tillåtna intervallet för ς enligt (3.53b) medför alltså att man för ett förlustmedium kan dela in studiet av exponentiella lösningar enligt (3.47a) och (3.47b) i två fall:

- (1) $\cos \varsigma = 1$ (eller $\varsigma=0$),
- (2) $0 < \cos \varsigma < 1$ (eller $0 < \varsigma < \pi/2$).

Det första fallet leder till homogena dämpade vågor, medan det andra fallet leder till inhomogena dämpade vågor.

Ett komplext brytningsindex, $\tilde{n}$, för mediet definieras av

$$\tilde{n}^2 = \mu_r \tilde{\epsilon}_r. \quad (3.54)$$

Real- och imaginärdelarna för brytningsindex betecknas med n resp. κ :

$$\tilde{n} = n + i\kappa. \quad (3.55)$$

Vi kommer ibland att finna det bekvämt att skriva vågvektorn $\mathbf{k}$ på följande sätt

$$\mathbf{k} = k_0 (N\hat{\mathbf{e}} + iK\hat{\mathbf{f}}), \quad (3.56)$$

med de reella

$$N = k_1 / k_0, \quad (3.57a)$$

$$K = k_2 / k_0. \quad (3.57b)$$

De likaledes reella vektorerna

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{k}_1 / |\mathbf{k}_1|, \quad (3.58a)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{k}_2 / |\mathbf{k}_2|, \quad (3.58b)$$

är som förut enhetsnormaler till planen med konstant fas resp. amplitud. Ur (3.52a), (3.54) och (3.55), (3.56) visar man sambanden

$$N^2 - K^2 = n^2 - \kappa^2, \quad (3.59a)$$

$$NK\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = n\kappa. \quad (3.59b)$$

N och K kan tolkas som effektiva brytningsindex (Chang m.fl., 2005).

3.4.2. Homogena dämpade vågor

Vi noterar först att då planen med konstant fas sammanfaller med planen med konstant amplitud, d.v.s. $\varsigma = 0$ eller $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$, har vi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k}^* = (\mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2) \times (\mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2) = i2(\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1) = \mathbf{0}. \quad (3.60)$$

Vi skriver

$$\mathbf{k}_1 = k_1 \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{k}_2 = k_2 \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.61b)$$

varefter vågvektorn blir

$$\mathbf{k} = (k_1 + ik_2)\hat{\mathbf{k}} \equiv \tilde{k}\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.62)$$

där

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2 = k_0 \sqrt{\mu_r \tilde{\epsilon}_r}, \quad (3.63)$$

är det komplexa vågtalet.

Insättning av (3.62) i Maxwells ekvationer (3.48a) och (3.48b) ger

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\tilde{\eta}} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0), \quad (3.64a)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\tilde{\eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}_0), \quad (3.64b)$$

där

$$\tilde{\eta} = \frac{\omega \mu_0 \mu_r}{\tilde{k}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r (1 + i\tau)}}, \quad (3.65)$$

är mediets komplexa vågimpedans. Om vi sätter

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2, \quad (3.66a)$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2, \quad (3.66b)$$

och sätter in i ekv. (3.49a) och (3.49b), fås

$$\tilde{k}\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2) = 0, \quad (3.67a)$$

$$\tilde{k}\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) = 0. \quad (3.67b)$$

Vi finner att alla fyra, reella vektorerna $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ ligger i samma plan vinkelrätt mot $\hat{\mathbf{k}}$. De momentana fältvektorererna är enligt (3.39)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i\phi_1}) = e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{E}_1 \cos \phi_1 - \mathbf{E}_2 \sin \phi_1), \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \operatorname{Re}(\mathbf{H}_0 e^{i\phi_1}) = e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0}{\tilde{\eta}} e^{i\phi_1}\right) = \\ &= \frac{e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}}{|\tilde{\eta}|} \{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1) \cos(\phi_1 - \xi) - (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_2) \sin(\phi_1 - \xi)\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

där vi skrivit den komplexa vågimpedansen $\tilde{\eta}$ i polär form

$$\tilde{\eta} = |\tilde{\eta}| e^{i\xi}. \quad (3.70)$$

Fasen

$$\phi_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (3.71)$$

hos vågen bestämmer ytorna för konstant fas, som är plan vinkelräta mot $\hat{\mathbf{k}}$ och som utbreder sig med fashastigheten

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k_1} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.72)$$

Amplituden hos vågen avtar som $e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$ då vågen utbreder sig i förlustmediet. På ett avstånd $\delta = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ längs riktningen $\hat{\mathbf{k}}$ så att

$$k_2 \delta = 1, \quad (3.73)$$

har vågens amplitud minskat med en faktor $1/e$. Avståndet

$$\delta = \frac{1}{k_2}, \quad (3.74)$$

kallas inträngningsdjupet för en våg i ett ledande medium.

Enligt (3.68) och (3.69) ser man att i en fix punkt i rummet har ellipserna, som spetsarna hos vektorerna $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ och $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ beskriver i planet för konstant fas, samma form (excentricitet) och rotationsriktning, men deras stor- (eller lill-)axlar är ömsesidigt ortogonala. I detta avseende har de homogena, dämpade, plana vågorna i förlustmedier mycket gemensamt med odämpade plana vågor i förlustfria medier.

Det finns emellertid en skillnad mellan de båda fallen. Om man bildar skalära produkten mellan $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i (3.68) och $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ i (3.69) får man

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}}{|\eta_c|} \{ \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} \cos \phi_1 \sin(\phi_1 - \xi) - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} \sin \phi_1 \cos(\phi_1 - \xi) \}, \quad (3.75)$$

där man använt vektorregeln $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$. Uttrycket (3.75) visar att i ett förlustfritt medium (d.v.s. $\sigma=0$ vilket ger $\xi=0$) är alltid de momentana elektriska och magnetiska fältvektorer ömsesidigt ortogonala. Detta gäller uppenbarligen inte allmänt för homogena plana vågor i ett medium med förluster.

Det finns ett specialfall som kan nämnas, där $\mathbf{E}_0$ är linjärpolariserad, vilket betyder att $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0$. I detta fall är högerledet i (3.75) lika med noll och de momentana elektriska och magnetiska vektorerna hos en linjärpolariserad, homogen plan våg är ömsesidigt ortogonala för alla tider, vare sig mediet är förlustfritt eller ej.

För att bestämma faskonstanten k_1 och dämpningskonstanten k_2 löser vi (3.52a) och (3.52b), med $\cos \zeta = 1$

$$k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 \mu_r \epsilon_r, \quad (3.76)$$

$$k_1 k_2 = \frac{1}{2} k_0^2 \mu_r \epsilon_r \tau, \quad (3.77)$$

genom att kvadrera dessa ekvationer och sedan addera resultatet, vilket ger

$$k_1^2 + k_2^2 = \pm k_0^2 \mu_r \epsilon_r \sqrt{1 + \tau^2}. \quad (3.78)$$

Vi summerar (3.76) och (3.78) och noterar att k_1 (eller k_2) måste vara rell, k_1^2 måste vara positiv, vilket ger att den negativa kvadratroten i (3.78) måste förkastas. Detta ger den unika lösningen

$$k_1 = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tau^2} + 1) \right]^{1/2} \geq k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}. \quad (3.79)$$

Subtraktion av (3.78) och (3.76) leder till

$$k_2 = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \tau^2} - 1) \right]^{1/2}. \quad (3.80)$$

Man noterar att $\tilde{k} = k_1 + ik_2$ bara beror av två parametrar: $k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$, som är faskonstanten för en homogen, plan våg i ett förlustfritt medium, samt τ , förlusttangenta.

3.4.3. Inhomogena dämpade vågor

Vi studerar nu fallet då planen med konstant fas inte sammanfaller med planen med konstant amplitud. För storheten $\mathbf{k} \times \mathbf{k}^*$ som infördes i (3.60) gäller nu

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k}^* = i2(\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1) \neq 0. \quad (3.81)$$

Faskonstanten k_1 och dämpningskonstanten k_2 kan uttryckas i termer av mediets kända parametrar $(\mu_r, \varepsilon_r, \sigma)$ jämte den okända parameteren ζ . Jämförelse av (3.52b) och (3.77) visar att de blir identiska om τ i den senare ersätts med $\tau / \cos \zeta$. Således kan man skriva upp lösningarna till (3.52a) och (3.52b) direkt från (3.79) och (3.80) med detta utbyte:

$$k_1 = k_0 \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\cos \zeta} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (3.82a)$$

$$k_2 = k_0 \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\cos \zeta} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.82b)$$

Motsvarande uttryck för $N = k_1 / k_0$ och $K = k_2 / k_0$ med (3.52a,b) insatta blir

$$N = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{(n^2 - \kappa^2)^2 + 4 \left(\frac{n\kappa}{\cos \zeta} \right)^2} + n^2 - \kappa^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (3.83a)$$

$$K = \left[\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(n^2 - \kappa^2)^2 + 4 \left(\frac{n\kappa}{\cos \zeta} \right)^2} - (n^2 - \kappa^2) \right\} \right]^{1/2}. \quad (3.83b)$$

Eftersom Maxwells ekvationer inte har fixerat ζ fullständigt, måste dess värde bestämmas slutgiltigt av randvillkor. Man måste därvid ha i minnet att Ekv. (3.53b) gett vissa restriktioner från fältekvationerna.

3.4.4. Polarisationssegenskaper hos harmoniska, inhomogena, plana vågor

I detta avsnitt skall vi se separat på polarisationsegenskaperna hos de harmoniska, inhomogena, plana vågorna (HIPV), eftersom dessa egenskaper är något speciella. Framställningen följer delvis Dupertuis m.fl. (1994). Denna referens har i ett appendix en sammanställning av de vanliga reella och komplexa vektoridentiteter, som kommer till användning i framställningen. (Man bör notera att skalärprodukten mellan två komplexa, tredimensionella vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ här definieras som $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, utan någon förekommande komplexkonjugering. Med denna definition blir alla de vanliga vektoridentiteterna för reella vektorer även giltiga i det komplexa fallet.)

1) HIPV är inte rent transversella.

De komplexa transversalitetstvillkoren (3.49a,b,c) leder till förekomsten av en longitudinell fältkomponent. För att visa det delar vi upp den elektriska fältstyrkan i ett ortogonalt, högervidet rumskoordinatsystem, definierat av de reella basvektorerna $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{e}}$, där den tredje axelriktningen valts att sammanfalla med utbredningsriktningen, se Figur 3.5:

$$\mathbf{E}_0 = E_{01} \hat{\mathbf{x}}_1 + E_{02} \hat{\mathbf{x}}_2 + E_{0//} \hat{\mathbf{e}}. \quad (3.84)$$

Ortogonalitetstvillkoret (3.49b) ger

$$\begin{aligned} 0 &= (k_1 \hat{\mathbf{e}} + ik_2 \hat{\mathbf{f}}) \cdot (E_{01} \hat{\mathbf{x}}_1 + E_{02} \hat{\mathbf{x}}_2 + E_{0//} \hat{\mathbf{e}}) = \\ &E_{0//} (k_1 + ik_2 \cos \zeta) + ik_2 (E_{01} \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}} + E_{02} \hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

vilket ger en longitudinell komponent

$$E_{0//} = - \frac{ik_2 (E_{01} \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}} + E_{02} \hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}})}{(k_1 + ik_2 \cos \zeta)}. \quad (3.86)$$

Fältvektorn oscillerar dock i ett plan, längs en ellips: Det tidsberoende fältet är, med $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ reella,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t}) = \text{Re}\{(\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\} \\ &= e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \{\mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \mathbf{E}_2 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)\},\end{aligned}\quad (3.87)$$

vilket för specifikt $\mathbf{r}$ är en ellips (Kristensson, 1999, avsnitt 3.6) i ett plan med normalvektorn

$$\hat{\mathbf{n}}_E \propto \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = -\frac{1}{2i} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*. \quad (3.88)$$

Normalvektorn är odefinierad för linjärt polariserat $\mathbf{E}$ -fält, som just definieras av (Kristensson, 1999)

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mathbf{0}. \quad (3.89)$$

[Att detta betyder linjärpolarisation kan förtydligas enligt följande (Chen, 1983). En våg

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i\phi}) = \mathbf{E}_1 \cos \phi - \mathbf{E}_2 \sin \phi, \quad (3.90)$$

där $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, sägs vara linjärpolariserad om riktningen av $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ förblir oförändrad, men fältvektorn oscillerar fram och tillbaka med harmoniskt varierande belopp. Med andra ord är förändringen av $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ med avseende på ϕ alltid parallell med $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, vilket kan uttryckas som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{d\phi} = \mathbf{0}, \quad (3.91)$$

vilket med (3.90) blir

$$(\mathbf{E}_1 \cos \phi - \mathbf{E}_2 \sin \phi) \times (-\mathbf{E}_1 \sin \phi - \mathbf{E}_2 \cos \phi) = -(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (3.92)$$

vilket enligt sambandet (3.88) ger (3.89).]

2) För HIPV:er kan inte $\mathbf{E}_0$ och $\mathbf{H}_0$ samtidigt vara linjärpolariserade.

Vi bildar kryssprodukten mellan (3.48b) och (3.48a)

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0. \quad (3.93)$$

Med tillämpning av vektorformeln $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})$ fås

$$\mathbf{k} = k_0^2 \mu_r \tilde{\varepsilon}_r \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0)} \equiv c_1 (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0), \quad (3.94)$$

där $c_1 = k_0^2 \mu_r \tilde{\varepsilon}_r / (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0))$ är en komplex konstant. Antag nu att en HIPV har både $\mathbf{E}_0$ och $\mathbf{H}_0$ linjärpolariserade, vilket enligt definitionen (3.89) betyder $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mathbf{0}$, eller $\mathbf{E}_0^* = c_2 \mathbf{E}_0$, samt $\mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0^* = \mathbf{0}$, eller $\mathbf{H}_0^* = c_3 \mathbf{H}_0$, där c_2, c_3 är två godtyckliga komplexa konstanter. Insättning av dessa $\mathbf{E}_0^*, \mathbf{H}_0^*$ i komplexkonjugatet av (3.94) ger

$\mathbf{k}^* = c_1^* c_2^* c_3^* (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) = c_4 \mathbf{k}$, där $c_4 = c_1^* c_2^* c_3^*$. Alltså är

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k}^* = c_4 (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \mathbf{0}, \quad (3.95)$$

vilket enligt (3.60) betyder en homogen plan våg, en motsägelse till ursprungsantagandet, vilket bevisar påståendet under denna punkt 2.

3) Å andra sidan är en cirkulärpolariserad HIPV alltid samtidigt cirkulär för både $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$. En cirkulärpolarisation karakteriseras av ett konstant $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|$. Enligt (3.90) är

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 &= (\mathbf{E}_1 \cos \phi - \mathbf{E}_2 \sin \phi) \cdot (\mathbf{E}_1 \cos \phi - \mathbf{E}_2 \sin \phi) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \cos 2\phi - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \sin 2\phi.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Villkoret för ett konstant $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|$ är att koefficienterna framför $\cos 2\phi$ och $\sin 2\phi$ är noll, d.v.s.

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0, \quad (3.97a)$$

$$\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2 = 0, \quad (3.97b)$$

eller $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$ och $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$. Eftersom $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$, d.v.s. $\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2 + 2i\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ kan villkoren (3.97a,b) för cirkulär polarisation också uttryckas som

$$\mathbf{E}_0^2 = 0. \quad (3.98)$$

För att visa påståendet under denna punkt 3) noterar vi igen från (3.48a) och (3.48b) att

$$\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0^2 = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{H}_0 = -\frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0^2. \quad (3.99)$$

Ett cirkulärpolariserat $\mathbf{E}_0$ (d.v.s. $\mathbf{E}_0^2 = 0$) ger alltså ett cirkulärpolariserat $\mathbf{H}_0$ (d.v.s. $\mathbf{H}_0^2 = 0$) och *vice versa*.

4) Magnetfältet $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ är generellt inte vinkelrätt mot det elektriska fältet såvida inte en av polarisationerna är linjär. Detta visades tidigare i samband med (3.75).

3.5. Reflektion och transmission

I detta avsnitt skall vi studera fenomenen kring reflektion och transmission av en våg som faller in mot en plan gränssyta mellan två medier, som antas vara av det generella slaget som behandlats ovan, d.v.s. homogena, isotropa och behäftade med förluster. Vågtypen antas vara en inhomogen plan våg, som faller in mot skiljeytan med godtycklig infallsvinkel. Som nämnts tidigare verkar det vara förvånansvärt nyligen, som detta fall getts en fullgod och utförlig behandling (Dupertuis m.fl., 1994). Föreliggande avsnitt bygger huvudsakligen på denna referens, jämte Chang m.fl. (2005) samt Chen (1983).

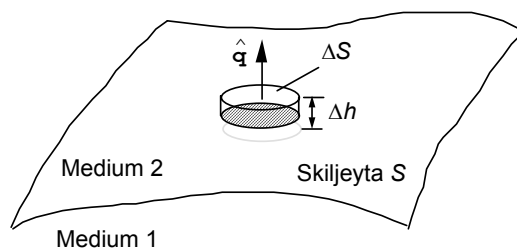
3.5.1. Riktningförändringar vid reflektion och transmission

3.5.1.1. Randvillkor för fältstyrkorna

Betrakta allmänt en skiljeyta S mellan två medier och låt $\hat{\mathbf{q}}$ vara en reell enhetsvektor vinkelrät mot S . Bilda ytintegralen i (3.3a) över den slutna ytan av en liten cylinder som går genom skiljeytan enligt Figur 3.6. Bidraget från den krökta mantelytan är direkt proportionellt mot Δh och för en tillräckligt liten tvärsnittsytan ΔS hos cylindern kan $\mathbf{B}$ anses konstant över de båda ändytorna. Då $\Delta h \rightarrow 0$ blir bidraget till ytintegralen från mantelytorna försumbart litet och man får

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{q}} = 0, \quad (3.100)$$

vilket utsäger att normalkomponenten av $\mathbf{B}$ över en gränssyta mellan två medier måste vara kontinuerlig.



Figur 3.6. Cylindervolym för härledning av randvillkor för elektriska och magnetiska flödestätheterna.

På samma sätt erhåller man vid integration av (3.3b) över cylindern i Figur 3.6,

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{q}} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho \Delta h = \rho_s . \quad (3.101)$$

Relation (3.101) uttrycker att med ett lager av ytladdning med tätheten ρ_s (C/m²) på S , ändras normalkomponenten av $\mathbf{D}$ abrupt över skiljeytan, med storleken av diskontinuiteten lika med ytladdningstätheten. Laddningsflödet över skiljeytan måste också uppfylla kontinuitetsekvationen i det fall endera eller båda konduktiviteterna är finita och inte noll,

$$\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} . \quad (3.102)$$

Med denna ekvation kan vi i stället för (3.101) härleda ett alternativt randvillkor, där vi eliminerat ytladdningstätheten och infört fältstyrkor (Stratton, 1941, s. 483). Antag att tidsberoendet är $\exp(-i\omega t)$ och att de båda medierna är homogena och isotropa. Då ger (3.101) och (3.102) tillsammans

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s , \quad (3.103a)$$

$$\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} = i\omega \rho_s , \quad (3.103b)$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ är (de reella) dielektricitetstalen för medium 1 resp. 2. Låt oss se när ytladdningen kan vara noll. Om $\rho_s = 0$, måste determinanten för (3.103) vara noll,

$$\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1 = 0 . \quad (3.104)$$

Om ρ_s inte är noll (vilket är det vanliga fallet), kan den elimineras i (3.103) och man erhåller då ett alternativt randvillkor på normalkomponenten av $\mathbf{E}$,

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma_1}{i\omega} E_{1n} - \frac{\sigma_2}{i\omega} E_{2n} , \quad (3.105)$$

eller

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + i \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \omega}\right) E_{1n} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} + i \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \omega}\right) E_{2n} = 0 . \quad (3.106)$$

Inför vi komplexa brytningsindex enligt definitionen (3.54) kan detta skrivas

$$\frac{1}{\mu_{1r}} \tilde{n}_1^2 E_{1n} - \frac{1}{\mu_{2r}} \tilde{n}_2^2 E_{2n} = 0 , \quad (3.107)$$

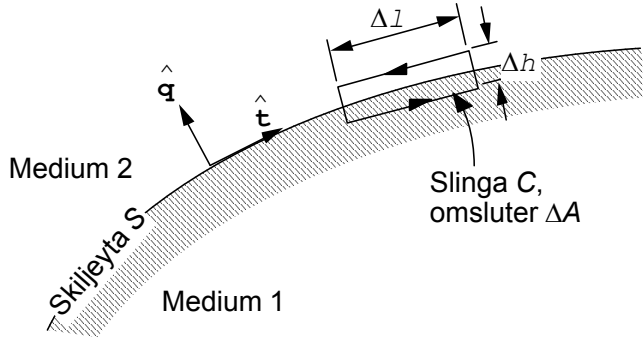
där μ_{1r}, μ_{2r} är de relativa permeabilitetstalen för medium 1 resp. 2.

Införs vågtal enligt (3.50a) fås slutligen

$$\mu_2 k_1^2 E_{1n} - \mu_1 k_2^2 E_{2n} = 0 , \quad (3.108)$$

där μ_1, μ_2 är permeabilitetstal för medium 1 resp. 2.

Vi övergår till tangentialkomponenterna. Betrakta allmänt en skiljeyta S mellan två medier och låt $\hat{\mathbf{q}}$ och $\hat{\mathbf{t}}$ vara rella enhetsvektorer riktade vinkelrätt resp. tangentiellt relativt ytan, enligt Figur 3.7. Figuren visar också en rektangulär integrationsslinga C , med långsidor med längden Δl , parallella med skiljeytan, samt kortsidor med längden Δh , vinkelräta mot S .



Figur 3.7. Rektangulär slinga för härledning av randvillkor för de elektriska och magnetiska fälten.

Vi tillämpar integralformeln (3.2a). Ytintegralen i högerledet går mot noll, då $\Delta h \rightarrow 0$, liksom bidragen från ändsegmenten hos C till linjeintegralen i vänsterledet. Man får då

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (3.109)$$

Alternativt kan man uttrycka (3.109) med ytnormalen $\hat{\mathbf{q}}$ som

$$\hat{\mathbf{q}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.110)$$

vilket uttrycker att tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ över en skiljeyta mellan två medier måste vara kontinuerlig.

På samma sätt kan man visa att (3.2b) leder till

$$\hat{\mathbf{q}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \mathbf{J} \Delta h = \mathbf{J}_S, \quad (3.111)$$

där $\mathbf{J}_S$ är ytströmtätheten (A/m). Relation (3.111) uttrycker att tangentialkomponenten av $\mathbf{H}$ över en skiljeyta mellan två medier är diskontinuerlig. Diskontinuitetens storlek är lika med ytströmtätheten. Om strömtätheten $\mathbf{J}$ är finit, som den måste vara i ett medium med ändlig konduktivitet (Kristensson, 1999, sid. 8), går gränsvärdet i högerledet av (3.111) mot noll ($\mathbf{J}_S = \Delta h \mathbf{J} = \Delta h \sigma \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}$, då $\Delta h \rightarrow 0$ med ändligt $\mathbf{E}$ nära gränssytan.). Vi har då

$$\hat{\mathbf{q}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.112)$$

d.v.s. tangentialkomponenterna av $\mathbf{H}$ är kontinuerlig.

3.5.1.2. Plan skiljeyta

Vi betraktar nu en plan skiljeyta. Den infallande vågen i medium 1 antar vi (i frekvensdomänen) som

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.113)$$

där $\mathbf{E}_{0i}$ och $\mathbf{k}_i$ är den komplexa, konstanta amplituden resp. vågvektorn hos den infallande vågen. En komplex vågvektor betyder att vågen generellt är en inhomogen plan våg. Vi ansätter en reflekterad plan våg i medium 1 och en transmitterad plan våg i medium 2, och ser om denna ansats uppfyller randvillkoren i skiljeytan.

Låt

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.114)$$

respektive

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.115)$$

där $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$ är vågvektorerna hos den reflekterade resp. den transmitterade vågen och $\mathbf{E}_{0r}, \mathbf{E}_{0t}$ motsvarande komplexa, konstanta amplitudvektorer hos respektive våg, alla än så länge obestämda.

Randvillkoret (3.110), som uttrycker kontinuiteten hos totala fältstyrkan över skiljeytan blir, uttryckt i de ansatta vågorna

$$(\mathbf{E}_{0i} \times \hat{\mathbf{q}})e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + (\mathbf{E}_{0r} \times \hat{\mathbf{q}})e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} - (\mathbf{E}_{0t} \times \hat{\mathbf{q}})e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (3.116)$$

Denna relation gäller för alla punkter $\mathbf{r}_P$ på ytan. Vektorkoefficienterna för exponentialfaktorerna $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}, e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}, e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$ är konstanta vektorer, varför (3.116) är en linjär relation mellan exponentialfunktionerna. Men dessa funktioner för olika exponenter är linjärt oberoende. Relation (3.116) gäller alltså om antingen alla vektorkoefficienter är noll eller om alla exponenter $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}, \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}, \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$ är lika i alla punkter på skiljeytan. Första fallet är omöjligt, då $\mathbf{E}_{0i}$ kan väljas godtyckligt. Således är

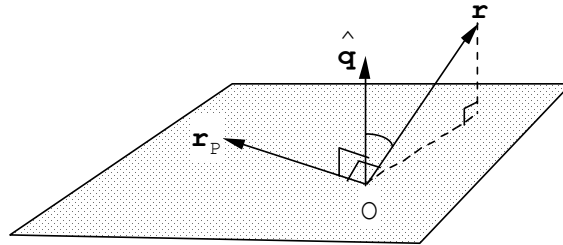
$$\mathbf{k}_i \mathbf{r}_P = \mathbf{k}_r \mathbf{r}_P = \mathbf{k}_t \mathbf{r}_P, \text{ eller} \quad (3.117a)$$

$$(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}_P = 0; (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}_P = 0. \quad (3.117b)$$

Men en godtycklig punkt $\mathbf{r}_P$ på ytan kan skrivas som

$$\mathbf{r}_P = \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{r}, \quad (3.118)$$

med fritt val av ett $\mathbf{r}$, i ett koordinatsystem O , vilka uppfyller kryssprodukts geometriska tolkning, se Figur 4.4.



Figur 3.8. Om O är en punkt på den plana skiljeytan mellan två medier, med normalvektorn $\hat{\mathbf{q}}$, och om O utgör origo i ett koordinatsystem, där $\mathbf{r}$ är positionsvektorn till en godtycklig rumspunkt, definierar $\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{r} = \mathbf{r}_P$ positionsvektorn till en punkt på skiljeytan.

Med (3.118) insatt i (3.117b) fås med ett byte av ordning mellan skalär- och vektorprodukt enligt en regel i vektoralgebran

$$(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_i) \cdot (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_i) \times \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \times \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (3.119)$$

På grund av det fria valet av $\mathbf{r}$ måste gälla att

$$(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_i) \times \hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{k}_t - \mathbf{k}_i) \times \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.120)$$

eller

$$\mathbf{k}_i \times \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{k}_r \times \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{k}_t \times \hat{\mathbf{q}}, \quad (3.121)$$

som uttrycker de allmänna lagarna för reflektion och refraktion i vektorform. De måste uppfyllas av vågvektorena hos de infallande, reflekterade och transmitterade vågorna vid skiljeytan mellan två godtyckliga homogena, linjära medier.

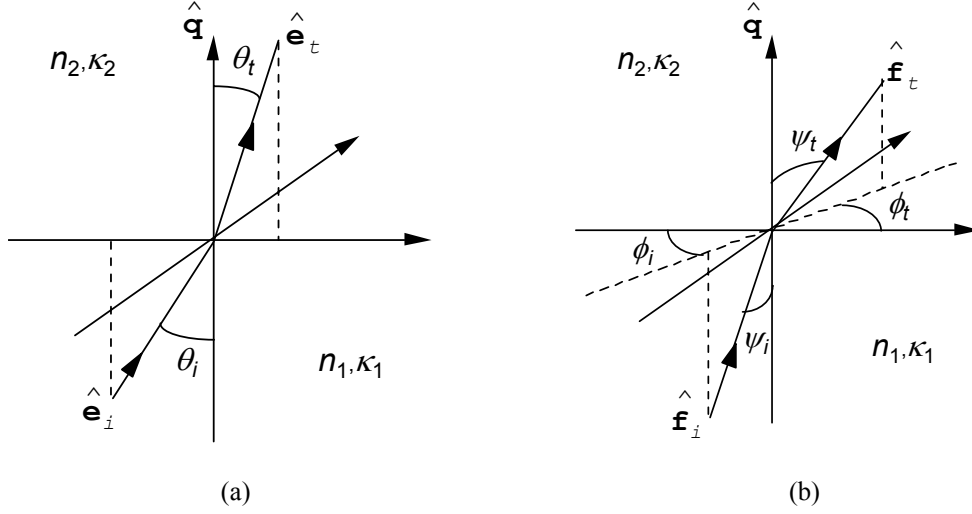
Lagarna (3.121) har förledande enkel form. I följande avsnitt beskrivs hur man ur dem beräknar riktningar (vinklar) för de olika vågkomponenterna.

3.5.1.3. Generaliserad Snells lag

Låt de båda medierna ha brytningsindex $n_1, \kappa_1, n_2, \kappa_2$ enligt (3.55), med vågvektorena $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$ för infallande, reflekterad resp. transmitterad våg. Respektive vågvektor antas ha real- resp. imaginärdelar enligt uppdelningen (3.56), d.v.s.

$$\mathbf{k} = k_0 (N\hat{\mathbf{e}} + iK\hat{\mathbf{f}}). \quad (3.56)$$

Geometrin visas i Figur 3.9, där real- och imaginärdel hos infallande och transmitterad vågvektor visas i två separata figurer. θ_i och ψ_i är infallsvinkeln för real- resp. imaginärdelen hos vågvektorn. Utan inskränkning kan vi anta att $\hat{\mathbf{f}}_i$ har azimutvinkeln ϕ_i .



Figur 3.9. Geometri vid skiljeplan mellan två medier med förluster. För tydlighets skull visas real- och imaginärdelarna hos infallande resp. transmitterade vågvektorer i separata figurer.

Sätt real- och imaginärdelar lika i (3.121):

$$|k_0 N_1| \cdot 1 \cdot \sin(\hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{q}) = |k_0 N_2| \cdot 1 \cdot \sin(\hat{\mathbf{e}}_t, \mathbf{q}), \quad (3.122a)$$

$$|k_0 K_1| \cdot 1 \cdot \sin(\hat{\mathbf{f}}_i, \mathbf{q}) = |k_0 K_2| \cdot 1 \cdot \sin(\hat{\mathbf{f}}_t, \mathbf{q}), \quad (3.122b)$$

eller

$$N_1 \sin \theta_i = N_2 \sin \theta_t, \quad (3.123a)$$

$$K_1 \sin \psi_i = K_2 \sin \psi_t, \quad (3.123b)$$

vilket är en **generaliserad Snells lag**.

Storheterna i högerleden i (3.123a,b), som innehåller storheter förknippade med transmissionsmediet, är inte primärt givna. De kan beräknas enligt följande gång.

Vi söker först en ekvation för beräkning av N_2 där i övrigt enbart primärt kända storheter ingår. Vi utgår från (3.59b) tillämpad på medium 2,

$$N_2 K_2 \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = n_2 \kappa_2, \quad (3.124)$$

där de båda enhetsvektorerna, uttryckt i vinklar är

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \begin{pmatrix} \sin \theta_t \\ 0 \\ \cos \theta_t \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_t = \begin{pmatrix} \sin \psi_t \cos \phi_t \\ \sin \psi_t \sin \phi_t \\ \cos \psi_t \end{pmatrix}. \quad (3.125)$$

Insättning av (3.125) i (3.124) och användning av (3.123) ger

$$\frac{N_1 \sin \theta_i}{\sin \theta_t} \frac{K_1 \sin \psi_i}{\sin \psi_t} (\sin \theta_t \sin \psi_t \cos \phi_t + \cos \theta_t \cos \psi_t) = n_2 \kappa_2. \quad (3.126)$$

Inför vi beteckningarna $N_s \equiv N_1 \sin \theta_i$, $K_s \equiv K_1 \sin \psi_i$, och noterar att $\phi_t = \phi_i$, kan (3.126) skrivas

$$n_2 \kappa_2 - N_s K_s \cos \phi_i = N_2 K_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} \sqrt{1 - \sin^2 \psi_t}. \quad (3.127)$$

Kvadrering ger

$$\begin{aligned} (n_2 \kappa_2 - N_s K_s \cos \phi_i)^2 &= (N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \theta_i)(K_2^2 - K_1^2 \sin^2 \psi_i) \\ &= (N_2^2 - N_s^2)(N_2^2 - n_2^2 + \kappa_2^2 - K_s^2), \end{aligned} \quad (3.128)$$

där vi använt (3.59a). N_2 kan därmed beräknas ur fjärdegradsekvationen

$$N_2^4 - (n_2^2 - \kappa_2^2 + K_s^2 + N_s^2)N_2^2 + N_s^2 K_s^2 + (n_2^2 - \kappa_2^2)N_s^2 - (n_2 \kappa_2 - N_s K_s \cos \phi)^2 = 0. \quad (3.129)$$

K_2 beräknas sedan ur (3.59a),

$$K_2^2 = N_2^2 - n_2^2 + \kappa_2^2. \quad (3.130)$$

För beräkning av den reflekterade vågen gäller (3.121)

$$\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{k}_r. \quad (3.131)$$

Dessutom uppfyller den infallande och den reflekterade vågen samma dispersionsrelation eftersom de utbreder sig i samma medium

$$\mathbf{k}_i^2 = k_0^2 \mu_r \tilde{\epsilon}_r = \mathbf{k}_r^2, \quad (3.132)$$

vilket innebär

$$|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r|. \quad (3.133)$$

Se separat på real- och imaginärdelarna hos vågvektorn i (3.121)

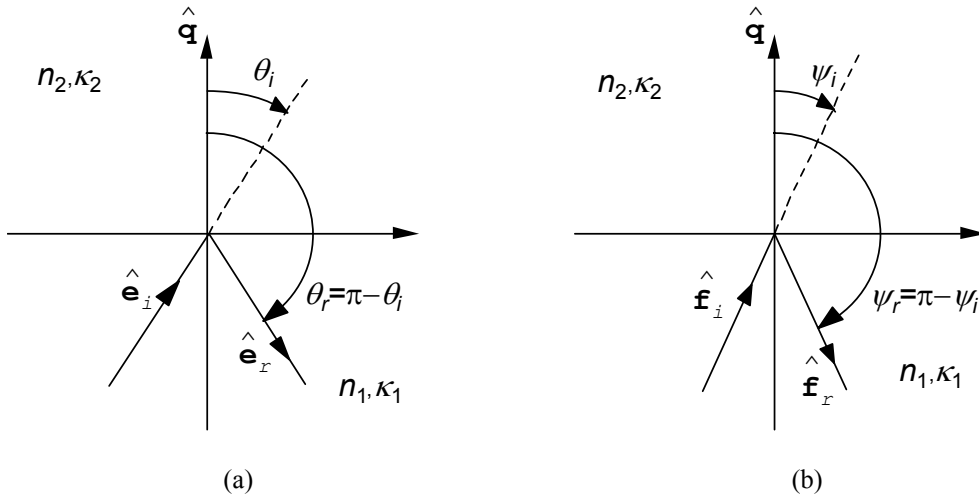
$$\hat{\mathbf{q}} \times (N_i \hat{\mathbf{e}}_i + iK_i \hat{\mathbf{f}}_i) = \hat{\mathbf{q}} \times (N_r \hat{\mathbf{e}}_r + iK_r \hat{\mathbf{f}}_r). \quad (3.134)$$

Identifikation av real- och imaginärdelarna ger

$$\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (3.135a)$$

$$\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{f}}_i = \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{f}}_r. \quad (3.135b)$$

Dessa är reella ekvationer för enhetsvektorer. Enda möjligheten för riktningen för resp. reflekterad vågkomponent i medium 1 är enligt Figur 3.10 (a) och (b).



Figur 3.10. Reflektionsgeometri vid skiljeplan mellan två medier med förluster. Geometrin visas i separata figurer för vågvektorerna för real- resp. imaginärdelarna.

Således är

$$\theta_r = \pi - \theta_i, \quad (3.136a)$$

$$\psi_r = \pi - \psi_i, \quad (3.136b)$$

$$\phi_r = \phi_i, \quad (3.136c)$$

och vi har

$$N_r \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = -N_i \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (3.137a)$$

$$iK_r \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{f}}_r = -iK_i \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{f}}_i. \quad (3.137b)$$

Addition ger

$$\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_r = -\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i. \quad (3.138)$$

Med stöd av Figur 3.11 kan vi teckna vågvektorns real- och imaginärdelkomponenters reflektions- och transmissionsriktningar. Reflektionsriktningarna ges av Figur 3.11 (a),

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_i - 2\hat{\mathbf{q}} \cos \theta_i, \quad (3.139a)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_r = \hat{\mathbf{f}}_i - 2\hat{\mathbf{q}} \cos \psi_i. \quad (3.139b)$$

För de transmitterade delvågorna har vi med stöd av Figur 3.11 (b)

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \hat{\mathbf{t}} \sin \theta_t + \hat{\mathbf{q}} \cos \theta_t, \quad (3.140a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{t}} \sin \theta_i + \hat{\mathbf{q}} \cos \theta_i, \quad (3.140b)$$

varur

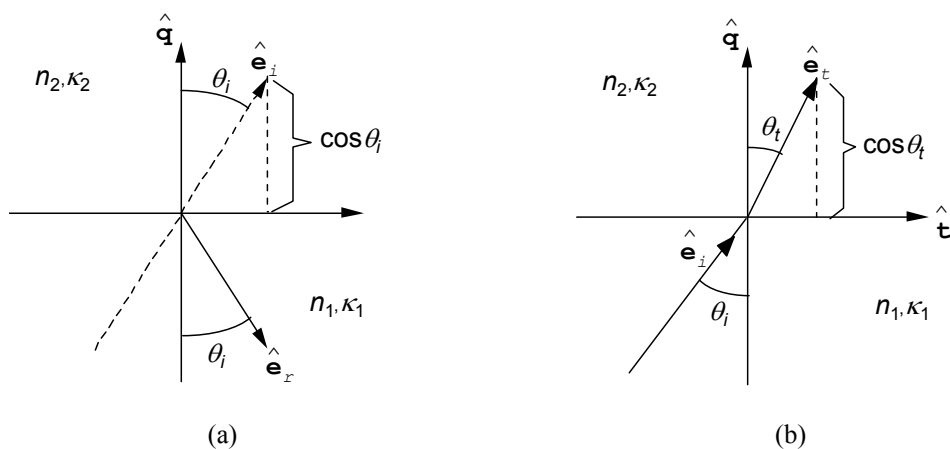
$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{\sin \theta_i} - \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \hat{\mathbf{q}}, \quad (3.141)$$

vilket ger

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \hat{\mathbf{e}}_i + \left(\cos \theta_t - \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \cos \theta_i \right) \hat{\mathbf{q}} = \frac{N_1}{N_2} \hat{\mathbf{e}}_i + \left(\cos \theta_t - \frac{N_1}{N_2} \cos \theta_i \right) \hat{\mathbf{q}}. \quad (3.142)$$

På samma sätt

$$\hat{\mathbf{f}}_t = \frac{K_1}{K_2} \hat{\mathbf{f}}_i + \left(\cos \psi_t - \frac{K_1}{K_2} \cos \psi_i \right) \hat{\mathbf{q}}. \quad (3.143)$$



Figur 3.11. Figurer som stöd för beräkning av vågvektorkomponenter i texten.

Ekvationerna (3.139), (3.142), (3.143) gör det möjligt att följa utbredningsriktningen hos respektive komponenter genom ett godtyckligt antal skiljeytor mellan absorberande medier.

Ovanstående behandling baserar sig på artikeln av Chang m.fl. (2005). Dupertuis m.fl. (1994) har en något annorlunda framställning, som innehåller delvis långa beräkningar. Här skall endast lyftas fram ett resultat, som verkar vara nytt i detta sammanhang, nämligen att under vissa villkor bildar infallsplanet och transmissionsplanet en vinkel $\Delta \neq 0$ med varandra. Vinkeln uppträder för rent inhomogena vågor och då argumenten hos de komplexa brytningsindexen hos de båda medierna är olika.

3.5.2. Reflektions- och transmissionskoefficienter

3.5.2.1. Generaliserade Fresnels lagar

För härledning av relationer mellan fälten hos de olika vågkomponenterna som uppträder kring skiljeytan mellan de båda medierna (Fresnels lagar i generaliserad form) utgår vi från de kontinuitets- eller diskontinuitetsekvationer för fälten som vi tagit fram i tidigare avsnitt. I medium 1 utgörs fältet av summan av infallande och reflekterat fält, samt i medium 2, det transmittade fältet, med tidigare införda index,

$$\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_r - \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad (3.144a)$$

$$\mu_i \hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) - \mu_t \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_t = 0, \quad (3.144b)$$

$$\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_i + \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_r - \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_t = \mathbf{0}, \quad (3.144c)$$

$$\varepsilon_i \hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) - \varepsilon_t \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_t = \rho_S. \quad (3.144d)$$

Här har vi i enlighet med den tidigare framställningen använt det faktum att ytströmtätheten blir noll för de här aktuella medierna, varför $\mathbf{H}_s$ s tangentialkomponenter är kontinuerliga. Däremot är ytladdningstätheten inte noll, så länge som $\sigma_i \varepsilon_i - \sigma_t \varepsilon_t \neq 0$, och har bibehållits i (3.144d).

Vanligen delar man lämpligen upp fältstorheterna i TE- och TM-polarisationer, beroende på om $\mathbf{E}$ -fältet är vinkelrätt mot infallsplanet eller parallellt med detta (t.ex. Stratton, 1941; Kong, 1986; Born och Wolf, 2006). I TE-fallet använder man sig av $\mathbf{E}$ -fältets randvillkor och i TM-fallet av $\mathbf{H}$ -fältets. I föreliggande generaliserade behandling kan generaliserade TE- och TM-polarisationer definieras med hjälp av två *komplexa*, ortogonala enhetsvektorer (Dupertuis m.fl. 1994; Chang m.fl., 2005),

$$\hat{\mathbf{h}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{k}}{\sqrt{(\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{k})^2}}, \quad \hat{\mathbf{h}}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{h}}_1}{k_0 \tilde{n}}, \quad (3.145)$$

som uppfyller

$$\hat{\mathbf{h}}_1^2 = \hat{\mathbf{h}}_2^2 = 1, \quad (3.146a)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \hat{\mathbf{h}}_2 = 0 \quad (\text{men } \hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \hat{\mathbf{h}}_2^* \neq 0, \text{ se inledn. till avsnitt 3.4.4.}). \quad (3.146b)$$

Här utgör $\hat{\mathbf{h}}_1$ basvektorn för motsvarigheten till TE-riktningen, då den är (komplext) ortogonal mot vågvektorn och ytnormalvektorn. Basvektorn $\hat{\mathbf{h}}_2$ är motsvarigheten till TM-riktningen, och är (komplext) ortogonal mot vågvektorn och $\hat{\mathbf{h}}_1$. Vi skall se om det är en ändamålsenlig definition, som dessutom skall övergå i de normala TE- och TM-fallen, för förlustfria medier. Analogt som i dessa fall projicerar vi fälten på de båda basvektorerna, varefter vi ser om dessa projicerade fält oberoende av varandra satisfierar Maxwells ekvationer.

Projektionerna $(\mathbf{E}_{PE}, \mathbf{E}_{PM})$ och $(\mathbf{H}_{PE}, \mathbf{H}_{PM})$ av de elektriska och magnetiska fälten $\mathbf{E}_0$ resp. $\mathbf{H}_0$ längs $(\hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2)$ definieras av

$$\mathbf{E}_{PE} = E_{PE} \hat{\mathbf{h}}_1, \quad \mathbf{H}_{PE} = H_{PE} \hat{\mathbf{h}}_2, \quad (3.147a)$$

$$\mathbf{E}_{PM} = E_{PM} \hat{\mathbf{h}}_2, \quad \mathbf{H}_{PM} = H_{PM} \hat{\mathbf{h}}_1, \quad (3.147b)$$

där de komplexa amplituderna

$$E_{\text{PE}} = \hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_0, \quad H_{\text{PE}} = \hat{\mathbf{h}}_2 \cdot \mathbf{H}_0, \quad (3.148a)$$

$$E_{\text{PM}} = \hat{\mathbf{h}}_2 \cdot \mathbf{E}_0, \quad H_{\text{PM}} = \hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{H}_0. \quad (3.148b)$$

Eftersom de generella vågtyperna som behandlas här (harmoniska, inhomogena plana vågor) har longitudinell komponent undviker Dupertuis m.fl. (1994) benämningen generaliserade TE-moder, utan kallar dem parallella elektriska (PE) moder eftersom polarisationsellipsen hos det elektriska fältet $\mathbf{E}_{\text{PE}} = E_{\text{PE}} \hat{\mathbf{h}}_1$ alltid förblir parallellt med skiljeytan ($\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{\text{PE}} = 0$). Motsvarande överväganden gäller för de parallella magnetiska (PM) moderna.

Analogt med framställningen i avsnitt 3.2.3 söker vi lösningar till Maxwells ekv. (3.44a) av formen

$$\mathbf{E}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} = \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PE}}}) e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.149)$$

med tillhörande magnetfält

$$\mathbf{H}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} = \hat{\mathbf{h}}_2 (\hat{\mathbf{h}}_2 \cdot \mathbf{H}_{0_{\text{PE}}}) e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.150)$$

samt

$$\mathbf{E}_{\text{PM}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PM}} \cdot \mathbf{r}} = \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PM}}}) e^{i\mathbf{k}_{\text{PM}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.151)$$

med tillhörande magnetfält

$$\mathbf{H}_{\text{PM}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PM}} \cdot \mathbf{r}} = \hat{\mathbf{h}}_2 (\hat{\mathbf{h}}_2 \cdot \mathbf{H}_{0_{\text{PM}}}) e^{i\mathbf{k}_{\text{PM}} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.152)$$

Bilda

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}}) &= \nabla \times \{ \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PE}}}) e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} \} = e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} \nabla \times \{ \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PE}}}) \} \\ &+ \nabla e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} \times \{ \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PE}}}) \} \\ &= e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} i\mathbf{k}_{\text{PE}} \times \{ \hat{\mathbf{h}}_1 (\hat{\mathbf{h}}_1 \cdot \mathbf{E}_{0_{\text{PE}}}) \} = i\mathbf{k}_{\text{PE}} \times (\mathbf{E}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (3.153)$$

och

$$i\omega \mathbf{B}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}} = i\omega \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{\text{PE}} e^{i\mathbf{k}_{\text{PE}} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.154)$$

Planvågsansatserna (3.149) och (3.150) uppfyller alltså Maxwells ekvation (3.44a), om

$$\mathbf{k}_{\text{PE}} \times \mathbf{E}_{\text{PE}} = \omega \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{\text{PE}}. \quad (3.155)$$

Här betecknar $\mathbf{E}_{\text{PE}}, \mathbf{H}_{\text{PE}}$ samhörande elektriskt och magnetiskt fält enligt (3.132), $\mathbf{k}_{\text{PE}}$ vågvektorn för motsvarande våg.

På samma sätt visar man att ansatserna (3.149) och (3.150) uppfyller Maxwells ekvation (3.44b), om

$$\mathbf{k}_{\text{PE}} \times \mathbf{H}_{\text{PE}} = -\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}_{\text{PE}}. \quad (3.156)$$

Man visar på samma sätt att att PM-ansatserna (3.151) och (3.152) uppfyller de båda maxwellska ekvationerna, under samma villkor (3.155) och (3.156), med index PE ersatt av PM. De båda vågorna med index PE resp. PM uppfyller alltså utan koppling till varandra Maxwells ekvationer. Den införda uppdelningen i PE- och PM-vågor är därför ändamålsenlig och medför samma fördelar som TE- och TM-uppdelningarna, och analyseras med hjälp av $\mathbf{E}$ -fält resp. $\mathbf{H}$ -fält.

Ovanstående resonemang gäller för alla tre vågkomponenterna - infallande, reflekterad och transmitterad våg. För att få samband mellan de reflekterade och transmitterade vågorna, samt den infallande, kombinerar vi nu de framtagna randvillkoren (3.144a) och (3.144c) med de relationer mellan $\mathbf{E}$ - och $\mathbf{H}$ -fält som allmänt gäller i medietypen, (3.48a) och (3.48b). Vi kan då få två ekvationer för $\mathbf{E}$ -fälten eller två ekvationer för $\mathbf{H}$ -fälten:

$$\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_t, \quad (3.144a)$$

$$\hat{\mathbf{q}} \times \left(\frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i}{\omega \mu_1} + \frac{\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r}{\omega \mu_1} \right) = \hat{\mathbf{q}} \times \frac{\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t}{\omega \mu_2}, \quad (3.157)$$

resp.

$$\hat{\mathbf{q}} \times \left(-\frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{H}_i}{\omega \tilde{\varepsilon}_1} - \frac{\mathbf{k}_r \times \mathbf{H}_r}{\omega \tilde{\varepsilon}_1} \right) = -\hat{\mathbf{q}} \times \frac{\mathbf{k}_t \times \mathbf{H}_t}{\omega \tilde{\varepsilon}_2}, \quad (3.158)$$

$$\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_i + \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_r = \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}_t. \quad (3.144c)$$

Här är μ_1, μ_2 permeabilitetstatet för medium 1 resp. 2, samt $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + i\sigma_1 / \omega$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + i\sigma_2 / \omega$ motsvarande komplexa dielektricitetstal. I (3.157) och (3.158) förekommer trippelprodukttermer som kan utvecklas, t.ex.

$$\hat{\mathbf{q}} \times (\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i) = (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_i) \mathbf{k}_i - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{E}_i. \quad (3.159)$$

Vi gör nu en uppdelning av fälten i PE- och PM-komponenter enligt ovan och kan enligt ovanstående behandla fallen separat.

För PE-fallet tillämpar vi (3.144a) multiplicerad med $\hat{\mathbf{q}} \times$ från vänster, samt (3.157). Trippelkryssprodukterna i den så erhållna ekvationen och i (3.157) utvecklas enligt (3.159), vilket ger följande två ekvationer

$$(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_i}) \hat{\mathbf{q}} - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \mathbf{E}_{PE_i} + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_r}) \hat{\mathbf{q}} - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \mathbf{E}_{PE_r} = (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_t}) \hat{\mathbf{q}} - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \mathbf{E}_{PE_t}, \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega \mu_1} \{ (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_i}) \mathbf{k}_i - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{E}_{PE_i} + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_r}) \mathbf{k}_r - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_r) \mathbf{E}_{PE_r} \} \\ &= \frac{1}{\omega \mu_2} \{ (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{E}_{PE_t}) \mathbf{k}_t - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) \mathbf{E}_{PE_t} \}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Eftersom alla fältkomponenter är ortogonala mot $\hat{\mathbf{q}}$, som är normerad, övergår dessa ekvationer till

$$\mathbf{E}_{PE_i} + \mathbf{E}_{PE_r} = \mathbf{E}_{PE_t}, \quad (3.162a)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \{ (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{E}_{PE_i} + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_r) \mathbf{E}_{PE_r} \} = \frac{1}{\mu_2} (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) \mathbf{E}_{PE_t}. \quad (3.162b)$$

Här är enligt (3.138) $\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_r = -\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i$. Man kan nu ur (3.162a) och (3.162b) lösa ut reflektionskoefficienten r_{PE} , där

$$E_{PE_r} = r_{PE} E_{PE_i}, \text{ med } r_{PE} = \frac{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \mu_1 - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \mu_2}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \mu_1 + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \mu_2}. \quad (3.163a)$$

Ur (3.162a) och (3.163a) fås t_{PE} , där

$$E_{PE_t} = t_{PE} E_{PE_i}, \text{ med } t_{PE} = \frac{2(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \mu_1}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \mu_1 + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \mu_2}. \quad (3.163b)$$

De båda uttrycken för r_{PE} och t_{PE} utgör **generaliserade Fresnel-lagar** för PE-polariserade harmoniska, inhomogena plana vågor.

PM-fallet behandlas på samma sätt utgående från (3.144c) och (3.158). För PM-polariserade harmoniska, inhomogena plana vågor fås de generaliserade Fresnel-lagarna

$$H_{PM_r} = r_{PM} H_{PM_i}, \text{ med } r_{PM} = \frac{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1 - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \tilde{\varepsilon}_2}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1 + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \tilde{\varepsilon}_2}, \quad (3.164a)$$

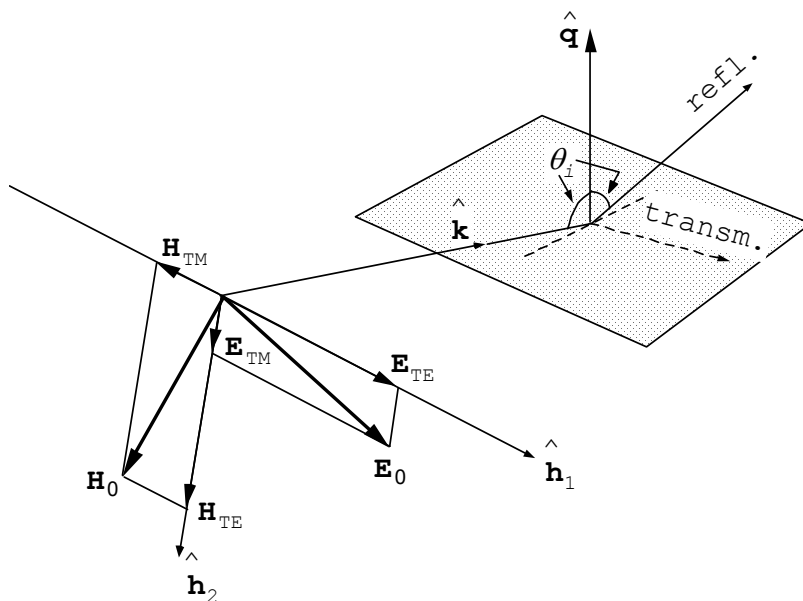
och

$$H_{PM_t} = t_{PM} H_{PM_u}, \text{ med } t_{PM} = \frac{2(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1 + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t) / \tilde{\varepsilon}_2}. \quad (3.164b)$$

vilka överensstämmer med (3.163a) och (3.163b) med utbytena $E \leftrightarrow H$ och $\mu \leftrightarrow \tilde{\varepsilon}$.

Lagarna har här bibehållits i kondenserad form, eftersom en utveckling av de komplexa skalärprodukterna i termer av parametriseringen är otymplig.

Eftersom man oftast rör sig med elektriska fältstyrkor, kan man här notera att (3.164a) även gäller för E_{PM} eftersom $E_{PM} = -\{k_0 \tilde{n} / (\omega \tilde{\epsilon})\} H_{PM}$ (Dupertuis m.fl., 1994, s. 1163, saknar faktorn k_0 i sin formel). Detta samband kan visas lämpligen genom att man tar stöd av det homogena vågfallet, med reella basvektorer $\hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2$. Vi vet att vektorgeometrin med fältstyrkor och utbredningsriktning för homogena vågor, där de båda fallen PE och PM benämnes TE resp. TM (se nästa avsnitt), är enligt Figur 3.3. Figur 3.12 visar dessa vektorer jämte den plana reflektionsytan.



Figur 3.12. Fältstyrkor och basvektorer i TE- och TM-fallen med infallande homogen plan våg.

Enligt (3.99) gäller för $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ hos en plan våg att $\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0^2 = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}_0^2$, där index r anger relativt permeabilitets- resp. dielektricitetstal. För TE- och TM-komponenterna gäller då att $\sqrt{\mu_0 \mu_r} E_{TE, TM} = \pm \sqrt{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r} E_{TE, TM}$, där plustecknet måste förkastas i TM-fallet enligt Figur 3.12. Således är $E_{TM} = -\sqrt{(\mu_0 \mu_r) / (\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r)} H_{TM} = -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} (\tilde{n} / \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r) H_{TM} = -(k_0 \tilde{n}) / (\omega \tilde{\varepsilon}) H_{TM}$. Insättning i (3.164a) ger samma relation mellan de elektriska fältstyrkorna E_{PM_r}, E_{PM_i} med samma reflektionskoefficient, r_{PM} :

$$E_{PM_r} = r_{PM} E_{PM_i}, \text{ med } r_{PM} = \frac{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1 - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_2}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_1 + (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) / \tilde{\varepsilon}_2}, \quad (3.164c)$$

Insättning i (3.164b) ger följande icke-symmetriska uttryck, eftersom infallsmediet och transmissionsmediet har olika materialparametrar

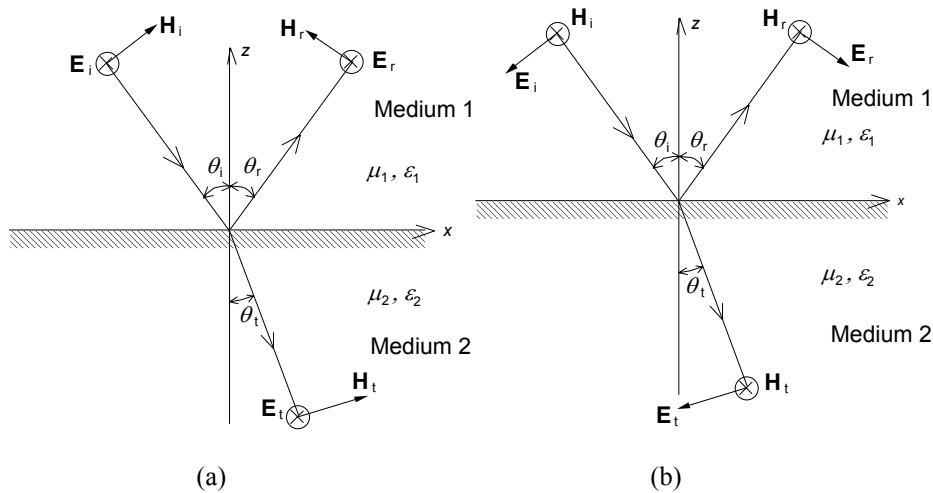
$$E_{PM_t} = \frac{2\tilde{n}_2(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i)}{\tilde{n}_1(\tilde{\varepsilon}_\gamma / \tilde{\varepsilon}_i)(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i) + \tilde{n}_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_t)} E_{PM_i}. \quad (3.164d)$$

Med alla delvågors fältstyrkor bestämda kan laddningstätheten på skiljeytan beräknas ur (3.144d).

Transmissionen hos en godtyckligt polariserad våg kan beräknas med principen för linjär superposition av PE- och PM-moderna med avseende på skiljevten.

3.5.2.2. Specialfall: homogen plan våg mot skiljeyta mellan förlustfria medier

Med det generella fallet löst kan vi, för att jämföra med standardreferenser, ta fram motsvarande formler i några olika varianter för ett enklare fall där den fysikaliska tolkningen är rättfram utan komplexa riktningsstorheter. Vi antar därför förlustfria medier med reella dielektricitetstal och brytningsindex. Vi antar också homogena plana vågor, d.v.s. där planen för konstant fas och konstant amplitud är parallella, och vågvektorerna är reella. De tidigare komplexa basvektorerna $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ enligt (3.145) blir nu reella, och motsvarande vågkomponenter övergår till en Transversell Elektrisk (TE) våg och en Transversell Magnetisk (TM) våg. TE-vågen är linjärpolariserad med elektriska fältvektorn vinkelrät mot infallsplanet, d.v.s. planet som innehåller normalvektorn till skiljeytan samt den infallande vågens utbredningsriktning, se Figur 3.13. I litteraturen används flera alternativa benämningar för denna vågtyp (TE): den kallas vinkelrätt polariserad, eller horisontellt polariserad, eller helt enkelt en **E**-våg eller *s*-våg (Kong, 1986; *s* ansluter till tyskans *senkrecht*). TM-vågen är linjärpolariserad med elektriska vektorn parallell med infallsplanet. Även för denna vågtyp används alternativa benämningar: den kallas parallellt polariserad, eller vertikalt polariserad, eller en **H**-våg eller *p*-våg. Som vi visat allmänt i föregående avsnitt kan de två vågkomponenterna studeras separat, vilket är lämpligt. Man har då två separata infallande vågor, karakteriserade av de samhörande fältstyrkeparen E_{TE}, H_{TE} i TE-fallet, respektive E_{TM}, H_{TM} i TM-fallet. Härledningen förenklas dessutom ytterligare genom att man för TE-vågen betraktar **E**-fältet (E_{TE}) och för TM-vågen betraktar **H**-fältet (H_{TM}), eftersom man därvid arbetar med tangentiella fält, som är kontinuerliga över skiljeytan. Detta medför att man direkt får riktningen hos den betraktade fältstyrkan i medium (2): den är lika med det infallande fältets.



Figur 3.13. Reflektion och transmission av infallande TE-våg (a), respektive TM-våg (b), mot plan skiljeyta mellan två medier.

Reflektion och transmission av TE-vågor

Reflektions- och transmissionskoefficienterna kan enligt (3.163a) och (3.163b) skrivas

$$r_{TE} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}, \quad (3.165a)$$

$$t_{TE} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}. \quad (3.165b)$$

Koefficienterna t_{TE}, r_{TE} är här uttryckta på samma form som i Kong (1986), sid. 113. Flera andra alternativ är vanliga. Vi har t.ex.

$$r_{TE} = \frac{\mu_2 k_i \cos \theta_i - \mu_1 k_t \cos \theta_t}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{\mu_2 k_i \cos \theta_i - \mu_1 k_t \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_t}}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_t}} \quad (3.166a)$$

$$= \frac{\mu_2 k_i \cos \theta_i - \mu_1 \sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_t}}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_t}}.$$

$$t_{TE} = \frac{2\mu_2 k_i \cos \theta_i}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{2\mu_2 k_i \cos \theta_i}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_t}} \quad (3.166b)$$

$$= \frac{2\mu_2 k_i \cos \theta_i}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_t}}.$$

Dessa slutformer överensstämmer med Stratton (1941) ekv. (16) sid. 493, som använder andra indexbeteckningar och en omkastad medienumerering, jämfört med vår.

Ytterligare en form är vanlig:

$$r_{TE} = \frac{\mu_2 k_i \cos \theta_i - \mu_1 k_t \cos \theta_t}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_i - \mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}. \quad (3.167a)$$

$$t_{TE} = \frac{2\mu_2 k_i \cos \theta_i}{\mu_2 k_i \cos \theta_i + \mu_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} =$$

$$= \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}. \quad (3.167b)$$

Reflektion och transmission av TM-vågor

Reflektions- och transmissionskoefficienterna kan enligt (3.164a) och (3.164b) skrivas

$$r_{TM} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}, \quad (3.168a)$$

$$t_{TM} = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_t \cos \theta_t}{k_i \cos \theta_i}}. \quad (3.168b)$$

Dessa resultat överensstämmer med Kong (1986) sid. 116. Som i TE-fallet härleder vi några alternativa uttryck.

$$\begin{aligned}
r_{TM} &= \frac{\varepsilon_2 k_i \cos \theta_i - \varepsilon_1 k_t \cos \theta_t}{\varepsilon_2 k_i \cos \theta_i + \varepsilon_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{\varepsilon_2 \frac{n_1}{n_2} k_t \cos \theta_i - \varepsilon_1 \frac{n_2}{n_1} k_i \cos \theta_t}{\varepsilon_2 \frac{n_1}{n_2} k_t \cos \theta_i + \varepsilon_1 \frac{n_2}{n_1} k_i \cos \theta_t} = \\
&= \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} k_t \cos \theta_i - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} k_i \cos \theta_t}{\varepsilon_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} k_t \cos \theta_i + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} k_i \cos \theta_t} \times \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} = \\
&= \frac{\mu_1 k_t \cos \theta_i - \mu_2 k_i \cos \theta_t}{\mu_1 k_t \cos \theta_i + \mu_2 k_i \cos \theta_t} = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i + \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}. \tag{3.169a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{TM} &= \frac{2\varepsilon_2 k_i \cos \theta_i}{\varepsilon_2 k_i \cos \theta_i + \varepsilon_1 k_t \cos \theta_t} = \frac{2\varepsilon_2 \frac{n_1}{n_2} k_t \cos \theta_i}{\varepsilon_2 \frac{n_1}{n_2} k_t \cos \theta_i + \varepsilon_1 \frac{n_2}{n_1} k_i \cos \theta_t} = \\
&= \frac{2\varepsilon_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} k_t \cos \theta_i}{\varepsilon_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} k_t \cos \theta_i + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} k_i \cos \theta_t} \times \frac{\mu_2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\mu_2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}} = \\
&= \frac{2\mu_1 k_t^2 \cos \theta_i}{\mu_1 k_t^2 \cos \theta_i + \mu_2 k_i k_t \cos \theta_t}. \tag{3.169b}
\end{aligned}$$

Slututtrycket i (3.169b) och det näst sista ledet i (3.169a) överensstämmer med (19) i Stratton (1941), sid. 494, med annan indexering.

Vinkelrätt infall

Med vinkelrätt infall, $\theta_i = 0$, kan TE- och TM-fallen inte skiljas åt och amplitudkvoterna mellan den transmitterade resp. reflekterade elektriska fältstyrkan och den infallande blir enligt (3.167)

$$t = \frac{2\mu_2 k_i}{\mu_2 k_i + \mu_1 k_t} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}}, \tag{3.170a}$$

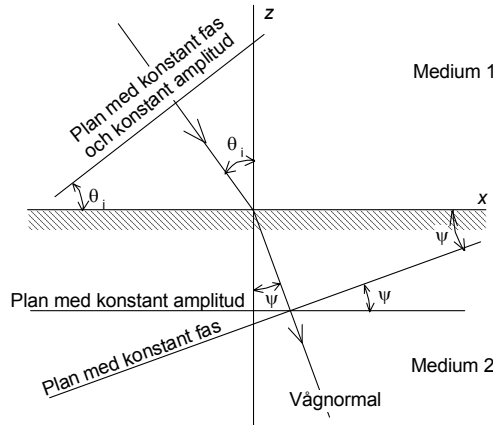
$$r = \frac{\mu_2 k_i - \mu_1 k_t}{\mu_2 k_i + \mu_1 k_t} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}}. \tag{3.170b}$$

Det bör påpekas att formlerna i detta avsnitt är giltiga även för mer generella fall, med komplexa materialparametrar och vinklar, medan åskådligheten, manifesterad av t.ex. Figur 3.13, då går förlorad.

3.6. Exempel: Gränsyta mellan idealt dielektrikum och dielektriskt medium med förluster

3.6.1. Inhomogena plana vågor

Vi skall nu ytterligare illustrera vågutbredningen genom en skiljeyta mellan två medier i ett fall som innebär en liten inskränkning jämfört med det generella, som avhandlats i avsnitt 3.5.1 och 3.5.2. Vi betraktar infall av en homogen plan våg i luft, medium 1, mot en plan skiljeyta till ett medium 2 med förluster. Vi skall specifikt se på polarisationsförändringen från den infallande vågen till den transmitterade och illustrera uppkomsten av en longitudinell fältkomponent i det senare mediet. En avsikt med detta avsnitt är också att visa att man för analysen, likt exempelvis Stratton (1941), kan använda komplex representation för vinklar och riktningar i de klassiska Snel- och Fresnel-lagarna, som då kan användas ograverade, men som kräver en speciell tolkning.



Figur 3.14. Refraktion, vid plan, ledande yta.

Vi antar att medium 2 i Figur 3.14 är karakteriserat av ett komplext dielektricitetsstal $\tilde{\epsilon}_2$, se avsnitt 3.4.1. Den traditionella härledningen av Snells och Fresnells lagar (t.ex. Stratton, 1941) ställer inga krav på att ingående storheter skall vara reella, så de gäller fortfarande formellt, men de uppträdande komplexa vinklarna kräver en särskild fysikalisk tolkning.

Vi utgår från den rumsvariabla delen för en plan våg, som utbreder sig i mediet,

$$e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = e^{-\text{Im}(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} e^{i\text{Re}(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.171)$$

Den komplexa vågvektorn $\mathbf{k}_t$ kan skrivas som produkten mellan dess komplexa amplitud k_t och en komplex enhetsvektor $\hat{\mathbf{n}}$, som definieras formellt, som i det reella fallet, av

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta_t, 0, -\cos \theta_t). \quad (3.172)$$

Här bestäms den komplexa brytningsvinkeln θ_t ur Snells lag (3.13)

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t. \quad (3.173)$$

Vågtalet k_i, k_t bestäms enligt avsnitt 3.1.1 av medieparametrarna,

$$k_i = \frac{\omega}{c} n_1 = \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}, \quad k_t = \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 = \sqrt{\mu_{r2} \tilde{\epsilon}_{r2}}. \quad (3.174)$$

Vågfunktionen i (3.171) blir

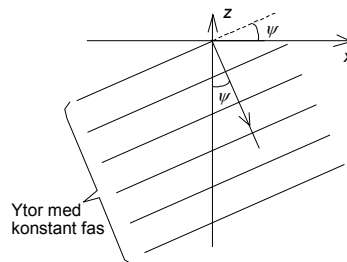
$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} &= e^{\text{Im}\{-xk_t \sin \theta_t + zk_t \cos \theta_t\}} e^{i\text{Re}\{xk_t \sin \theta_t - zk_t \cos \theta_t\}} = \\ &= e^{z \text{Im}\{k_t \cos \theta_t\}} e^{i\text{Re}\{xk_t \sin \theta_t - zk_t \cos \theta_t\}}, \end{aligned} \quad (3.175)$$

där vi utnyttjat att $k_t \sin \theta_t = k_i \sin \theta_i$ är reell, enligt förutsättningen (3.174) att medium 1 är förlustfritt.

Vi finner enligt (3.175) att ytorna för konstant amplitud är planen $\text{Im}\{k_t \cos \theta_t\}z = \text{konstant}$, medan ytorna för konstant fas är planen

$$\text{Re}\{k_t \sin \theta_t\}x + \text{Re}\{-k_t \cos \theta_t\}z = \text{konstant} = C. \quad (3.176)$$

Dessa två familjer sammanfaller inte generellt. Fältet i mediet med förluster (2) representeras av ett system av inhomogena plana vågor. Planen med konstant amplitud är parallella med skiljeytan (endast z -beroende i (3.175) av den amplitudbestämmande delen). Fasyornas skärning med planen $y = \text{konstant}$ är linjer, vilkas ekvation ges av (3.176). Deras lutning är betecknad med (den reella) vinkeln ψ i Figur 3.15.



Figur 3.15. Fasytor i mediet med förluster ($z < 0$). Ytornas lutning bestäms av den reella vinkeln ψ , som är den verkliga brytningsvinkeln.

Speciellt för linjen genom origo ($C = 0$) fås

$$\frac{z}{x} = \tan \psi, \quad (3.177)$$

eller

$$\psi = \arctan \frac{\text{Re}\{k_t \sin \theta_t\}}{\text{Re}\{k_t \cos \theta_t\}} = \arctan \frac{\text{Re}\{k_i \sin \theta_i\}}{\text{Re}\{k_i \cos \theta_i\}}. \quad (3.178)$$

Vinkeln ψ är den verkliga brytningsvinkeln, som bestämmer den transmitterade vågens utbredningsriktning, som definitionsmässigt är den vinkel som normalvektorn till de plana ytorna med konstant fas i mediet bildar med negativa z -axeln. För en våg i luft med infallsvinkeln 30° mot ett medium med ett fiktivt ansatt $\epsilon_r = 3 + 20i$ blir vinkeln $\psi = 8.4^\circ$. Samma värde erhålls om man använder formlerna för det generella fallet enligt avsnitt 3.5.1.3 för att beräkna riktningen $\hat{\mathbf{e}}$. Detta formelunderlag ger också att $\hat{\mathbf{f}}$, normalriktningen till planen för konstant amplitud, är riktad vinkelrätt mot skiljeytan mellan medierna.

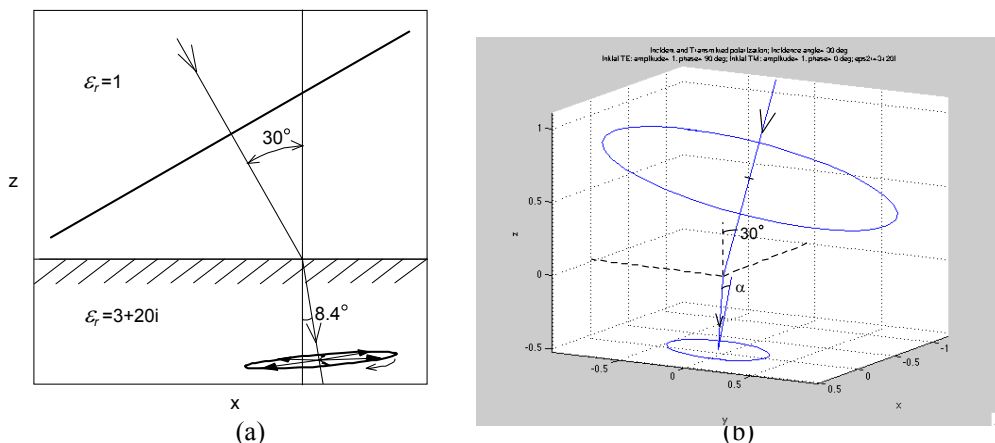
3.6.2. Longitudinellt fält

Om infallsvinkeln är skild från noll, inträffar i mediet med förluster att fältet inte längre är strikt transversellt – det finns en fältkomponent i utbredningsriktningen (jfr avsnitt 3.4.4). Den följande beräkningen kommer att visa att effekten är obetydlig för realistiska medier i se-igenom-tillämpningen.

Polarisationen definieras av den kurva, som den elektriska fältstyrkans spets beskriver som funktion av tiden. Även med en komponent i utbredningsriktningen är denna kurva en ellips i ett plan, vilket följer av att det generellt gäller att en elektrisk vektor med tre oberoende, linjära, tidsharmoniska svängningar längs tre ömsesidigt ortogonala riktningar beskriver en ellips (se t.ex. Azzam och Bashara, 1987). [Här kan nämnas att man allmänt kan visa att polarisationen hos en vektorkvantitet är ett tvådimensionellt begrepp (Nguyen och Strohbehn, 1991), som inte har någon analogi i högre dimensioner.] För att fullständigt beskriva en godtycklig elliptisk polarisation krävs två basvektorer.

Med en longitudinell fältkomponent och med vetskapen att polarisationen fortfarande kan beskrivas av en ellips i ett plan, följer att ellipsplanet inte längre är vinkelrätt mot vågutbredningen, som vid klassisk radarvågutbredning i luft. Vi illustrerar detta i Figur 3.16 för en linjärt polariserad TM-våg (polarisationen i infallsplanet), som faller in snett mot ett

medium. Vi antar först ett medium med ett fiktivt ansatt $\varepsilon_r = 3 + 20i$ för att få en effekt, som är märkbar i figurrepresentationen. Man ser att uppkomsten av den longitudinella komponenten i förlustmediet medför att polarisationen blir elliptisk, med polarisationsellipsens plan parallell med utbredningsriktningen. Om infallande polarisation är elliptisk med en fältkomponent även i y -riktningen fås ett fall mellan en transversellt och en longitudinellt orienterad ellips. En kvantifiering av detta ges av vinkeln mellan vågens utbredningsriktning och normalvektorn till polarisationsellipsens plan. Den förra riktningen erhålls från vinkeln ψ i Figur 3.15 och är 8.4° enligt ovan, medan den senare kan beräknas från vektorprodukten mellan två fältstyrkevektorer, som definierar två punkter på polarisationsellipsen, beräknade för två olika tidpunkter, i en fix punkt i rummet. Vinkeln är 5.7° för det antagna mediet, vilket visas i den högra figuren. För betong med $\varepsilon_r = 6.5 + 0.43i$, ett mer realistiskt väggmaterial, är vinkeln 0.4° d.v.s. polarisationsellipsens plan är praktiskt taget vinkelrätt mot utbredningsriktningen, alltså en nära nog transversell våg.



Figur 3.16. Figurdel (a): En plan våg, linjärpolariserad i x - z -planet (TM-våg), som faller in från luft snett mot skiljeytan till ett medium med dielektriska egenskaper med förluster ($\varepsilon_r = 3 + 20i$) kommer i förlustmediet att ha en fältkomponent i utbredningsriktningen, d.v.s. en longitudinell fältkomponent. Detta medför att polarisationen inte längre förblir linjär, utan elliptisk med polarisationsellipsen liggande i infallsplanet. Ellipsplanets normal (vinkelrät mot papperet) bildar 90° med utbredningsriktningen.

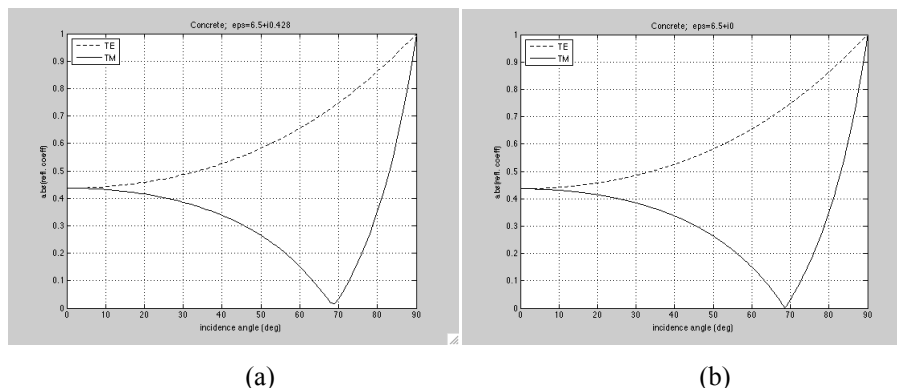
Figurdel (b): Om den infallande vågen även har en TE-komponent (y -komponent) erhåller man i förlustmediet en polarisationsellips, där normalen till ellipsplanet bildar någon vinkel α mellan 0° (transversell våg) och 90° (longitudinell) med utbredningsriktningen. Figuren visar infallande cirkulärpolarisation. Vinkeln $\alpha = 5.7^\circ$ i detta fall.

Vi har här koncentrerat oss på den elektriska fältstyrkan. Mer fullständiga behandlingar som utreder de detaljerade sambanden mellan den elektriska och den magnetiska fältstyrkan, Poyntings vektor m.m. har publicerats av Burrows (1965), Tokumaru (1997), De Roo och Tai (2003).

3.6.3. Brewstervinkeln

I Figur 3.17 är absolutbeloppen, $|r_{TE}|$, $|r_{TM}|$ av reflektionskoefficienterna för TE- resp. TM-fallen visade som funktion av infallsvinkel. Figurdel (a) gäller för betong med $\varepsilon_r = 6.50 + i0.428$, medan (b) är ett förlustfritt material med $\varepsilon_r = 6.50$. Man noterar de olika utseendena för TE- resp. TM-fallen för resp. material. TM-polarisationen uppvisar ett minimum; för det förlustfria fallet antar reflektionskoefficienten värdet noll i detta minimum, medan värdet är något större än noll för betongen. Vinkeln där minimum inträffar kallas den *polariserande vinkeln* eller *Brewstervinkeln*. Eftersom reflektionskoefficienten för vertikal (relativt infallsplanet) polarisation är noll för denna vinkel i det förlustfria fallet, innebär det att den reflekterade vågen är fullständigt polariserad, horisontellt (relativt infallsplanet). Med andra ord kommer en TM-våg som faller in mot det dielektriska materialet att vid Brewstervinkeln helt transmittas in i detta, en önskvärd egenskap vid väggpenetrerande radar. Vi kommer i Avsnitt 3.8 att beräkna effektt transmissionen genom ett betongskikt som

funktion av infallsvinkeln, för att bl.a. få en kvantitativ uppfattning om brewstereffektens betydelse.



Figur 3.17. Absolutbelopp av reflektionskoefficienter för TE- ("horisontell" polarisation, relativt infallsplanet) och TM-våg ("vertikal" polarisation, relativt infallsplanet) som funktion av infallsvinkel för (a) betong med $\epsilon_r = 6.50 + i0.428$, samt (b) ett förlustfritt material med $\epsilon_r = 6.50$. Minimum i koefficienten för den vertikala polarisationen definierar en vinkel, den s.k. Brewstervinkeln. Beräknade värdet för denna vinkel enligt ekv. (3.179b) i texten är 68.6° för båda fallen (a) och (b).

Brewstervinkeln θ_B beräknas för reella dielektricitetstal (förlustfria medier) ur uttrycket

$$\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (3.179a)$$

Om medium 2 har förluster (ϵ_2 komplext) låter sig θ_B inte beräknas enkelt. Man kan använda formeln

$$\tan \theta_B = \sqrt{\frac{|\epsilon_2|}{\epsilon_1}}, \quad (3.179b)$$

men den entydigaste definitionen för θ_B tycks vara dess association med minimum i reflektionskoefficienten (Leung m.fl., 2007). En fysikalisk förklaring (enligt Sommerfeld, 1959) av uppkomsten av Brewstervinkeln gavs av Sume och Nilsson (2008).

3.7. Exempel: Polarisationstransformation vid målobjekt bakom flerskiktstvätt

I rapporten kommer radarpenetrationen genom en vägg huvudsakligen att avse vinkelrätt infall, vilket är lättast att analysera och behandla. Något infallsplan kan inte definieras, TM- och TE-fallen sammanfaller och en vägg utan variationer i tvärsled ger då samma dämpning och fasändring för den transversella elektriska fältstyrkan, oberoende av dennas orientering. Polarisationen ändras inte av väggpasagen. Vi skall dock i detta avsnitt behandla allmänna, sneda infallsvinklar, eftersom dessa kan vara tänkbara i se-igenom-tillämpningen (t.ex. på grund av brewstereffekten, se föregående och nästa avsnitt).

En vägg som består av homogena, planparallella skikt, som kan vara av olika material, utgör ett relativt realistiskt utförande av en vägg. Fallet kan dessutom lösas exakt med avseende på reflektions- och transmissionsegenskaper, i olika polarisationer, med upprepad tillämpning av den fresnelska teorin i de olika skikten.

3.7.1. Vågutbredning i flerskiktsmedium

En flerskiktstvätt kan, om vi antar att inga variationer förekommer i sidled, ses som ett inhomogent medium uppbyggt av n planparallella, homogena skikt. En schematisk bild av en sådan flerskiktstvätt visas i Figur 3.18. Varje skikt karakteriseras av dielektriciteten ϵ_m , permeabiliteten μ_m och tjockleken l_m . Reflektions- och transmissionskoefficienter för ett

skiktat medium, som kan innehålla material med förluster, ges t.ex. av Born och Wolf (1999), Kong (1986) och Orfanidis (2003).

Antag nu att en plan våg i skikt 0 infaller mot skikt 1 (se Figur 3.18). Låt den infallande vågens elektriska fält betecknas med E_{inc} , det av mediet i skikt 1 reflekterade fältet i skikt 0 betecknas med E_{ref} och det transmitterade fältet i skikt $n+1$ betecknas med E_{trans} . Om man vidare inte har någon våg i skikt $n+1$ som infaller mot mediet i skikt n , kan sambandet mellan fälten skrivas som (Born och Wolf, 1999; Jansen m.fl., 2008)

$$\begin{pmatrix} E_{inc} \\ E_{ref} \end{pmatrix} = I_0 \left(\prod_{m=1}^n P_m I_m \right) \begin{pmatrix} E_{trans} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{trans} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} E_{trans}. \quad (3.180)$$

P_m representerar utbredningen i skikt m , medan I_m hanterar effekterna vid skiljeytan mellan skikten m och $m+1$. Matrisen P_m kan uttryckas som

$$P_m = \begin{pmatrix} e^{in_m k_0 l_m \cos(\theta_m)} & 0 \\ 0 & e^{-in_m k_0 l_m \cos(\theta_m)} \end{pmatrix}, \quad (3.181)$$

där n_m är brytningsindex, θ_m är propagationsvinkeln i skikt m , som beräknas med hjälp av Snells brytningslag, och k_0 är vågtalet i fri rymd.

Matrisen I_m kan formuleras som

$$I_m = \frac{1}{t_{TE/TM}} \begin{pmatrix} 1 & r_{TE/TM} \\ r_{TE/TM} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.182)$$

där fresnelkoefficienterna för reflektion och transmission för väggmaterial använts

$$r_{Fresnel} = \frac{n_{eff,m} - n_{eff,m+1}}{n_{eff,m} + n_{eff,m+1}}, \quad (3.183a)$$

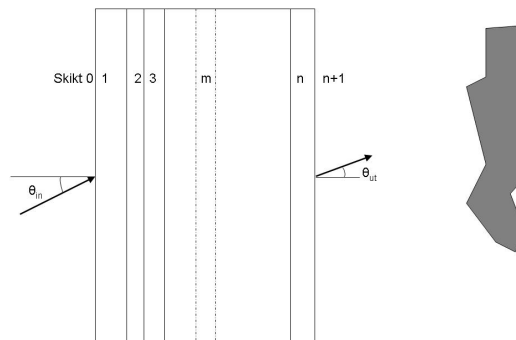
$$t_{Fresnel} = \frac{2n_{eff,m}}{n_{eff,m} + n_{eff,m+1}}. \quad (3.183b)$$

Det effektiva brytningsindexet är för TE-polarisation $n_{eff,m} = n_m \cos(\theta_m)$ och för TM-polarisation $n_{eff,m} = n_m / \cos(\theta_m)$.

Reflektions- och transmissionskoefficienterna för det skiktade mediet är

$$t_{strat} = \frac{E_{trans}}{E_{inc}} = \frac{1}{a_{11}}, \quad (3.184a)$$

$$r_{strat} = \frac{E_{ref}}{E_{inc}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}. \quad (3.184b)$$



Figur 3.18. Schematisk bild av en flerskiktig vägg uppbyggd av n planparallella, homogena skikt. Här infaller en plan våg från vänster i figuren (skikt 0) mot skikt 1. Vågen passerar väggens och sprids mot målet, som befinner sig till höger om väggens i skikt $n+1$. Den monostatiska returen från målet bildar infallsvinkeln θ_{ut} mot väggnormalen och passerar sedan åter genom väggens. I beräkningarna har enklare mål (dieder och sfär) än det som visas i denna figur använts.

3.7.2. Om beräkningarna

Nedan kommer några beräkningsexempel att illustrera hur polarisationen påverkas när vågen interagerar med enkla väggar och mål. I ett fall reflekteras vågen mot en halvoändlig vägg; i de övriga fallen passerar vågen genom en vägg, reflekteras mot ett perfekt ledande mål (dieder eller sfär, som antas befinna sig på ett stort avstånd från väggen) och passerar sedan åter genom väggen. Måldimensionerna antas mycket större än våglängden.

Beräkningsresultaten kommer att visas i form av polarisationsellipser. Ellipserna presenteras i koordinatsystem, som följer den s.k. *Backscatter Alignment (BSA)*-konventionen (Ulaby och Elachi, 1990). Man ser ellipserna i ett plan, vinkelrätt mot utbredningsriktningen. Enligt BSA-konventionen betraktar man vågen i utbredningsriktningen vid transmission, medan man efter en reflektion betraktar den mot utbredningsriktningen. Beträktaren intar således en antenncentrerad position: i sändarantennen vid transmission, och i mottagarantennen efter reflektionen.

Om annat ej anges har den av radarn utsända vågen följande egenskaper: TE- och TM-komponenterna har amplituderna 2 respektive 1 V/m; fasskillnaden mellan TE- och TM-komponenterna är $\delta=\pi/3$; vågens frekvens är 10 GHz. Infallsvinkel θ_{in} som vågen bildar mot väggen är definierad så att $\theta_{in}=0^\circ$ svarar mot vinkelrätt infall och $\theta_{in}=90^\circ$ svarar mot ett infall parallellt med väggen, se även Figur 3.18.

Här används IEEE:s definition för polarisationens rotation, vilket innebär att den elektriska fältvektorn anses rotera högerhant om en betraktare i en fix punkt i rummet, som tittar i vågens utbredningsriktning observerar att dess spets rör sig medurs. Vänsterhant rotation svarar mot en rotation moturs. I samtliga fall som visas här är den infallande vågen vänsterhant.

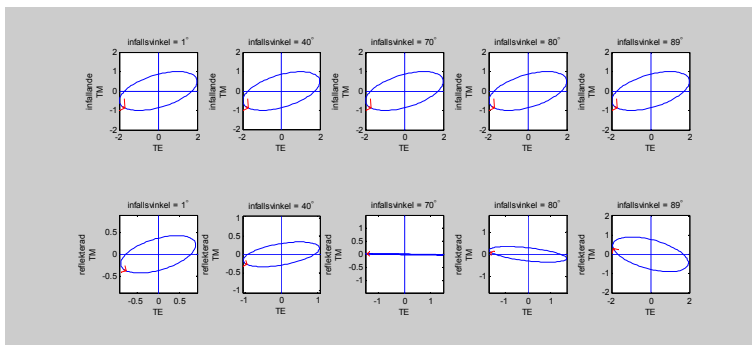
Beräkningarna har gjorts i Matlab. Rutinerna är flexibla då antalet väggsnitt, deras tjocklek och deras dielektricitetsstal kan väljas godtyckligt; måltypen kan även varieras.

3.7.3. Reflektion mot halvoändlig vägg

Antag att den från radarn utsända vågen infaller mot en halvoändlig betongvägg. Den reflekterade vågens polarisation kommer att bero på infallsvinkeln θ_{in} . I Figur 3.19 visas infallande (den övre radens paneler) och reflekterad (den nedre radens paneler) vågs polarisationsellips för fem olika infallsvinklar. De röda pilarna visar åt vilket håll elektriska fältvektorn roterar.

Den reflekterade vågens polarisation ändrar karaktär när infallsvinkeln är ungefär lika med Brewstervinkel, θ_B , för vilken reflektionen av TM-komponenten har ett minimum. I detta fall är Brewstervinkeln 68.6° och för $\theta_{in}=70^\circ$ är returvägen därför nära nog linjärpolariserad. För $\theta_{in}>\theta_B$ har polarisationsellipsen efter reflektion en annan lutning än vad den hade före reflektion, vilket innebär att den reflekterade vågen har fasförskjutits jämfört med den infallande vågen. Notera även att för dessa infallsvinklar är returvägen, med den definition som används här, högerhant.

Skalorna på axlarna ger information om dämpningen i väggen och målets bakåtspridning. Däremot har propagationsdämpning i frirymd försumrats.



Figur 3.19. En våg med elliptisk polarisation infaller mot en halvoändlig betongvägg. För fem infallsvinklar visas infallande (övre radens paneler) och reflekterad vågs (nedre radens paneler) polarisationsellips. Figurerna visar ellipsen i ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen, enligt BSA-konventionen (se texten): i den övre raden är utbredningsriktningen in mot papperet, medan den i den undre raden, efter reflektionen, är riktad utåt. När infallsvinkeln är ungefär lika med Brewstervinkeln, $\theta_{in}=68.6^\circ$, fås en nära nog horisontellt linjärpolariserad reflekterad våg. Den vertikala komponenten är nära noll. De röda pilarna visar elektriska fältvektorns rotationsriktning.

3.7.4. Ensiktsvägg

Antag nu istället att den utsända vågen infaller mot en vertikal vägg med ändlig tjocklek. Bakom väggen placeras ett mål. Vågen kommer att dämpad passera genom väggen och därefter reflekteras mot målet. När vågen åter passerar genom väggen är den nya infallsvinkeln lika med utgångsvinkeln efter den första väggpassagen, då vi antar att målet befinner sig på ett stort avstånd från väggen vilket gör att den reflekterade vågen infaller som en plan våg.

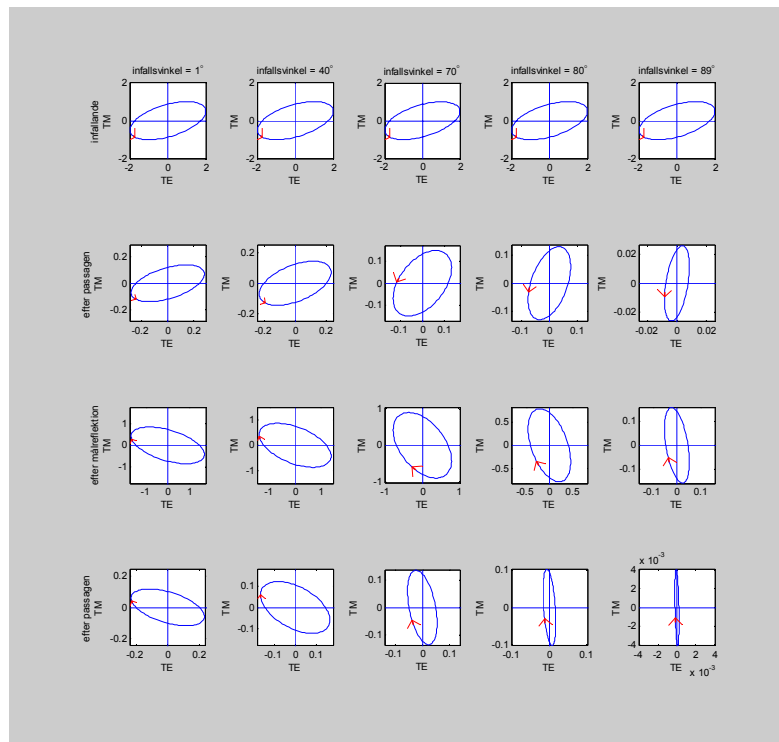
Karakteristiken på vågens polarisation kommer att bestämmas av väggmaterialets egenskaper, målets form och materialegenskaper och i vissa fall målets orientering. Vågens polarisation efter den första väggpassagen, efter reflektion mot målet samt efter den andra väggpassagen, kan beräknas med hjälp av ekvationerna i avsnitt 3.7.1 samt spridningsmatriser. Spridningsmatriser beskriver hur den reflekterade vågens elektriska fält är relaterad till den inkommande vågens elektriska fält (Sullivan (2003) och Ulaby och Elachi (1990)). Avsnitt A.4.2 i Appendix A diskuterar spridningsmatrisen i mer detalj, och i Tabell A.6.1 ges spridningsmatriserna för några enkla reflektortyper.

I de följande tre fallen kommer väggen att bestå av ett 1 dm tjockt betongskikt. Dielektricitetsstalet för betong ges i Tabell 3.1. Målet kommer antingen att vara en rätvinklig dieder eller en sfär. Diedern antas orienterad så att den vänder maximal apertur mot den infallande vågen, vilket innebär att diederfogen är vinkelrät mot radarvågens utbredningsriktning. Dess lutningsvinkel, ψ , kommer in som en parameter i spridningsmatrisen. Denna vinkel beskriver fogens lutning mot horisontalplanet.

Figur 3.20 visar resultaten av beräkningar för en dieder med lutningen $\psi=0^\circ$. För små infallsvinklar ser man att vågens polarisation efter väggpassagen (andra radens paneler) är relativt oförändrad jämfört med den infallande vågens polarisation (första radens paneler). För infallsvinklar större än Brewstervinkeln vrids polarisationsellipsen allt mer. Tydligast blir det i extremfallet med ett nästan parallellt infall mot väggen ($\theta_m=89^\circ$), då vågen efter väggpassagen är klart dominerad av TM-komponenten. Rotationsriktningen påverkas inte av väggpassagen.

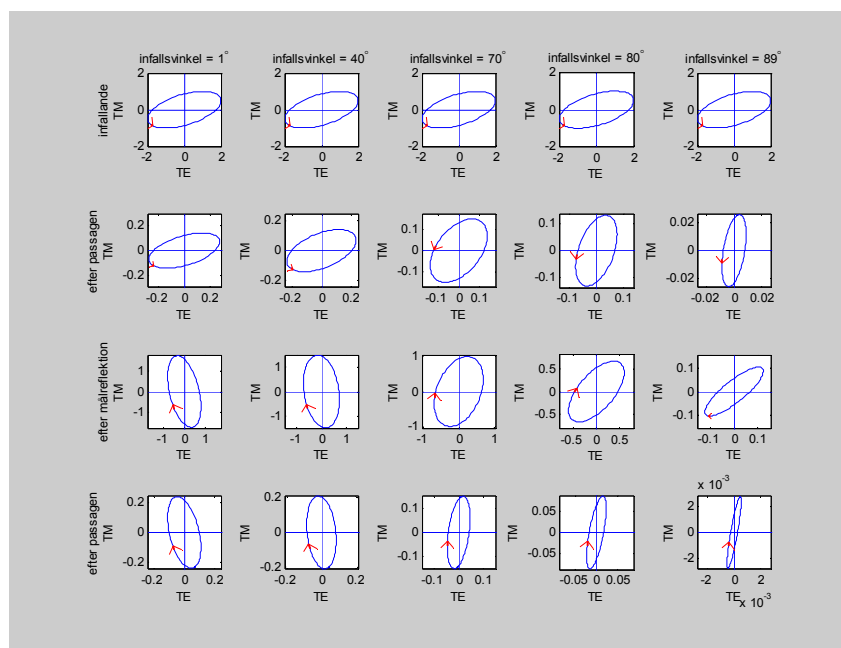
Vågens polarisation efter reflektion i diedern visas i den tredje radens paneler i Figur 3.20. Som kan ses har diedern en tydlig påverkan på polarisationen hos den reflekterade vågen. Polarisationsellipsen har speglats i TE-axeln men förhållandet mellan TE- och TM-komponenterna har inte förändrats, d.v.s. ellipsformen är oförändrad. Detta svarar mot en fasförskjutning på π . Vågens rotation är nu högerhänt.

Den sista radens paneler i Figur 3.20 visar polarisationsellipserna för vågen när den åter passerat genom ensiktsväggen. Förändringarna är de samma som vid den första passagen. För stora ursprungliga infallsvinklar, $\theta_m=80^\circ$ och 89° , har de dubbla väggpassagerna effekten att vågen nu är nära nog linjärpolariserad. Även för $\theta_m=70^\circ$, d.v.s. bara något större än Brewstervinkeln, kan denna tendens iaktas, om än inte lika uttalat. För infallsvinklar mindre än Brewstervinkeln har vågen kvar sin ellipspolarisation.



Figur 3.20. En våg med elliptisk polarisation infaller mot en vägg som består av ett 1 dm tjockt betongskikt. Varje kolumn svarar mot en viss infallsvinkel, totalt fem vinklar. Raderna svarar, uppför och ned, mot den infallande vågens polarisation, vågens polarisation efter väggpassagen, vågens polarisation efter reflektion i en rätvinklig dieder med lutningsvinkeln $\psi=0$, samt vågens polarisation efter den andra väggpassagen. Skälvärdena på axlarna avser fältstyrkor. Endast dämpning i väggen och spridning i målet enligt dess dimensioner har beaktats, däremot inte utbredningsdämpning i luften. Diedern har dimensionerna 0.6 m (längs med fogen) och 0.3 m (vinkelrät mot fogen).

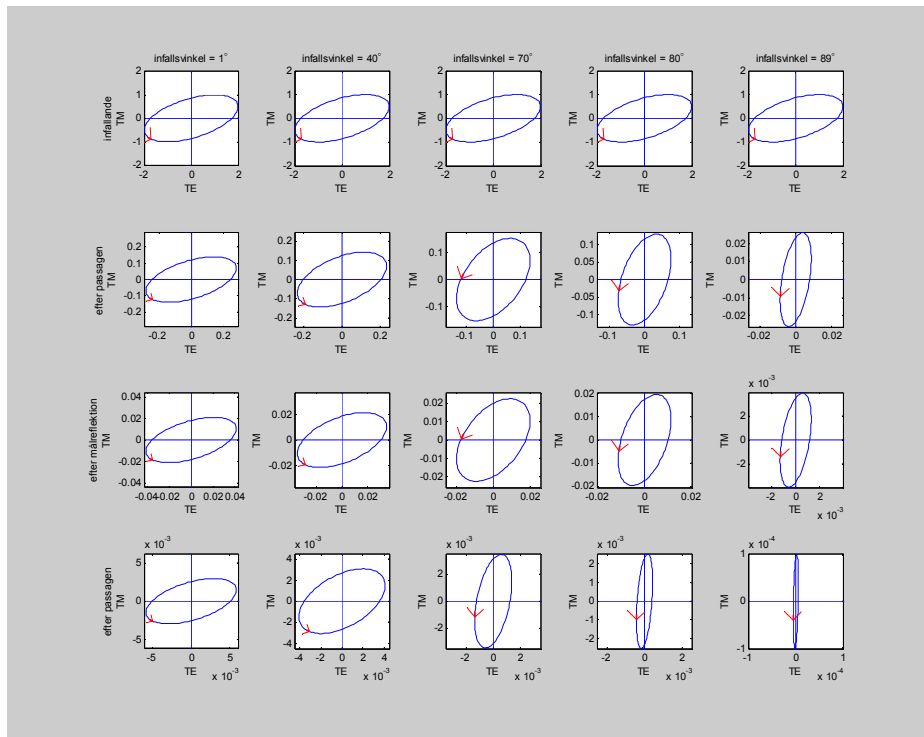
Om diederns lutning är $\psi=60^\circ$ men allt annat är lika jämfört med det tidigare fallet, fås Figur 3.21. Här kan man se samma inverkan av diedern som tidigare: den ändrar inte ellipsformen men däremot lutningen genom att ellipsen speglas i ett plan i infallsriktningen, genom diederfogen som nu lutar. Efter återpassagen genom väggen är tendensen mot linjärpolariserade TM-vågor i de fall när den ursprungliga infallsvinkeln var stor, inte lika stark som när diedern hade lutningen $\psi=0^\circ$ men den är fortfarande synlig för $\theta_{in}=89^\circ$.



Figur 3.21. Som i Figur 3.20 men nu är diederns lutningsvinkel $\psi=60^\circ$.

I nästa fall är målet en sfär men i övrigt är allt lika jämfört med de två tidigare fallen. (Sfären är stor, d.v.s. radien är mycket större än våglängden, vilket innebär att hänsyn inte behöver tas till diffraktionseffekter.) Resultaten av beräkningarna visas i Figur 3.22. Olikt en dieder ändrar inte sfären vågens polarisation. Skillnaden mellan en dieder där $\psi=0^\circ$ och en sfär, är antalet studsar som vågen gör mot målet. Dubbelstudsens mot diedern ger en fasförskjutning på ytterligare ett π , vilket ändrar polarisationen hos vågen.

Resultatet med en sfär som mål är att vågen efter återpassagen genom väggen är mer lik den infallande vågen för de flesta infallsvinklar än vad som var fallet när målet var en dieder. För den största infallsvinkeln finns dock tendensen att vågen blir linjärpolariserad kvar.



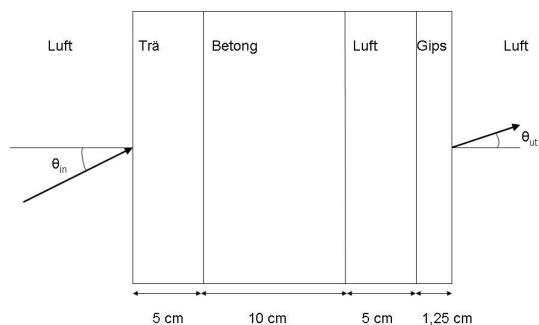
Figur 3.22. Som i Figur 3.20 men nu är målet en sfär med stor radie, 0.3 m, jämfört med våglängden 3 cm.

3.7.5. Flerskiktsvägg

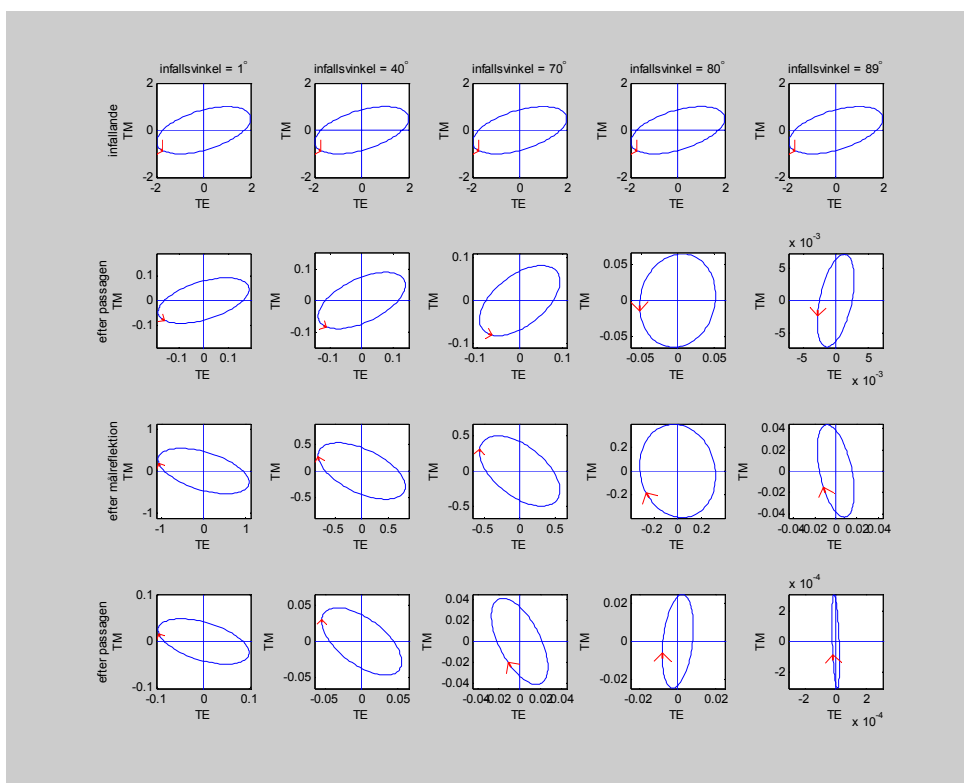
Den enkla väggen i de tidigare exemplen ersätts nu av en flerskiktsvägg med väggskikt av trä, betong, luft och gips, enligt Figur 3.23. Väggskikten är planparallella och homogena skikt men har olika materialegenskaper. Dielektricitetstalen för de aktuella väggskikten ges i Tabell 3.1. Målet i denna beräkning är en dieder med lutningen $\psi=0^\circ$. Resultaten visas i Figur 3.24. Om man jämför denna figur med Figur 3.20 ses att den tjockare flerskiktswäggen ger en större dämpning. För små infallsvinklar är skillnaderna i vågens polarisationsegenskaper efter väggpassagen i de två fallen små. Den största skillnaden bland de fem infallsvinklarna som används här, inträffar för $\theta_{in}=80^\circ$ där vågen efter den första väggpassagen nästan är cirkulärpolariserad. Efter återpassagen genom väggen är vågens polarisation, för alla ursprungliga infallsvinklar, ganska lik den som beräknades i enskiktsfallet.

Tabell 3.1. Dielektricitetstal för de väggskikt som använts i exempelberäkningarna.

	TRÄ	BETONG	GIPS
$\epsilon_r = \epsilon_r' - i\epsilon_r''$	2.0660 - 0.1100i	6.4954 - 0.4284i	2.3110 - 0.0230i



Figur 3.23. Illustration av flerskiktsväggen. Målet, en dieder, befinner sig till höger om väggen. Dielektricitetstalen för trä, betong och gips ges i Tabell 3.1. Skiktens tjocklek indikeras i nederkanten av figuren.



Figur 3.24. En våg med elliptisk polarisation infaller mot flerskiktsväggen i Figur 3.23. Den infallande vågens egenskaper är desamma som i fallen i avsnitt 3.7.4. Målet är en dieder med lutningen $\psi=0^\circ$. Figuren visar vågen polarisation före och efter väggpassage, efter målreflektion och efter återpassage genom väggen, för fem olika infallsvinklar, som i Figur 3.20.

3.7.6. Sammanfattning

Här har illustrerats hur polarisationen påverkas när en våg passerar genom väggar och reflekteras mot en dieder (med varierande lutning) eller en sfär. Exempelen är inte helt realistiska, men kan ge en bild av grundläggande principer. Inhomogena väggar och mer komplicerade mål är ett par exempel på faktorer som skulle göra exemplen mer realistiska men samtidigt mer komplicerade.

Resultatet vid ett generellt, snett infall visar att polarisationen ändras, då vågen interagerar med ett gränsskikt mellan två medier, hos väggen eller målobjektet, däremot inte inne i ett homogent skikt. Speciellt tydlig är ändringen i väggfallet när infallsvinkeln är större än Brewstervinkeln. För dessa vinklar är skillnaderna mellan TM- och TE-komponenternas olika transmissions- och reflektionsegenskaper störst. Hur stor påverkan blir bestäms av väggens materialegenskaper.

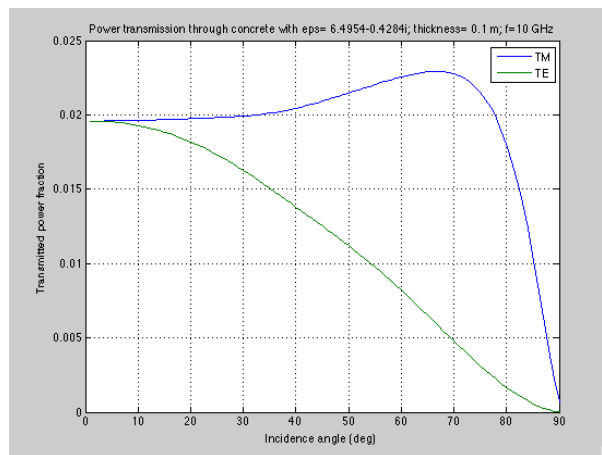
Målet som vågen reflekteras i kan påverka både polarisationen och elektriska fältvektorns rotationsriktning. Avgörande är bl.a. hur många studsar vågen gör i målet och, i dessa exempel för diedern, målets orientering.

Dessa exempel visar också att kännedom om en vågs polarisation kan ge information om mål och väggegenskaper.

En slutsats som man kan dra är att om ett radarsystem, som används för se-genom-vägg, lutar så att väggen belyses under snett infall, måste radarn mäta i två ortogonala polarisationskanaler vid mottagning, om man skall vara säker på att samla in hela returvägens effekt. Med ett enkanaligt system kan man råka ut för fallet att returen är ortogonalt polariserad i förhållande till antennpolarisationen och ger noll signal i mottagaren.

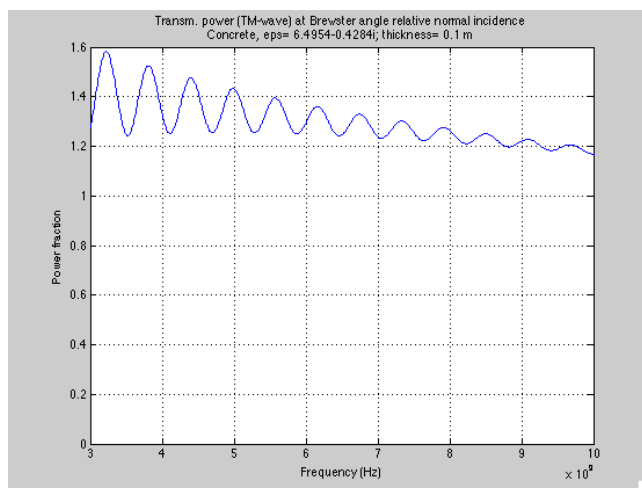
3.8. Exempel: Effektttransmission genom betongskikt

Figur 3.25 visar den relativa transmitterade effekten (beloppet av transmissionskoefficienten enligt (3.184a) i kvadrat) genom en betongvägg, som funktion av infallsvinkeln, för infallande TM- resp. TE-fält med samma fältstyrka. Figuren avser främst att illustrera hur stor ökning av den transmitterade effekten som erhålles kring Brewstervinkeln i TM-fallet (vertikal polarisation relativt infallsplanet), som inträffar vid 68° . Frekvensen är 10 GHz, och vägg tjockleken 10 cm. Man finner att effektttransmissionen vid Brewstervinkeln för TM-polariserad våg är 1.17 gånger den vid infall vinkelrätt mot väggen. För detektion är det tvåvägstransmissionen, som är avgörande för detektionsprestanda. Förbättringen vid Brewstervinkeln blir då $1.17^2 = 1.37$, alltså ca 40% jämfört med vinkelrätt infall. Man måste dock även ta hänsyn till de geometriska konsekvenserna med ett så snett infall som Brewstervinkeln innebär beträffande täckning av sökområdet, jfr Figur 2.1. För att täcka sökområdet kan det bli nödvändigt med en SAR-liknande avsökning genom förflyttning av antennen längs väggen, under det att infallsvinkeln hålls konstant, vilket är ohanterligt med ett handburet system.



Figur 3.25. Effektttransmission som funktion av infallsvinkel genom betongskikt med $\epsilon_r = 6.4954 - 0.4284i$, tjockleken 10 cm, vid frekvensen 10 GHz. Figuren visar skillnaderna mellan de båda polarisationsfallen TM och TE. I TM-fallet (linjär polarisation, parallell med infallsplanet) fås ett transmissionsmaximum vid brewstervinkeln, ca 68° .

Den i Figur 3.25 visade effektkvoten är beroende av frekvens och vägg tjocklek. Interferenseffekter i väggskiktet mellan vågkomponenter som genomgått multipelreflexer mellan de båda väggytorna leder till ett snabbt varierande frekvensberoende. Ett exempel visas i Figur 3.26, för frekvensområdet 3-10 GHz.



Figur 3.26. Transmitterad effekt vid brewstervinkeln, TM-polarisation, relativt transmitterad effekt vid vinkelrätt infall, för betongväggen i Figur 3.25 som funktion av frekvens mellan 3 och 10 GHz.

4. Mål- och bakgrundsinteraktion

4.1. Inledning

Efter vägginteraktionen, som behandlats i föregående avsnitt, kommer radarvågen i Figur 2.1 in i ett område med potentiella målobjekt och objekt av bakgrundskaraktär (exempelvis möbler). En avsedd nytta med att få polarimetrisk information från detta område är att den i något avseende skall kunna öka radarkontrasten mellan målobjekt, främst mänskliga, och bakgrund. Problemet att optimera sådan kontrast har behandlats relativt mycket i radarlitteraturen. Vi skall här redogöra för de vanligaste föreslagna metoderna och ge några exempel på några arbeten, där de använda metoderna för mål/bakgrundsdiskriminering är tillämpliga på se-igenom-fallet.

Vid en genomgång av litteraturen har påträffats arbeten från endast en forskningsgrupp i USA, som behandlat optimering explicit i tillämpningen se genom vägg, vilket motiverat att beskriva dessa arbeten relativt detaljerat här. Ytterligare en forskningsgrupps arbeten (i Holland) har befunnits vara viktiga, då gruppen utvecklat metoder för teoretisk behandling av dopplerpolarimetri, d.v.s. kombinerad användning av polarisation och dopplereffekt för mål/bakgrundsdiskriminering, visserligen i en annan tillämpning (väderradar), men som ändå bedömts tillämplig här.

4.2. Optimeringsteori

Det bör inledningsvis påpekas att det för optimeringen inte är nödvändigt att konstruera en antenn med en polarisation som väljs så att den mottagna effekten från ett mål maximeras. Samma information kan syntetiseras från den som samlas in (koherent) genom användning av två ortogonalt polariserade antennner. Vidare bör påpekas att en polarisation som väljs att maximera kontrasten kanske inte maximerar returen från ett avsett målobjekt eller minimerar returen från en oönskad spridare. Den mottagna signalen kan nämligen vara försämrad av brus, som kan ge ett oacceptabelt lågt signal/brusförhållande. De motstridiga kraven på kontrasthöjning och signal/brus-förbättring måste vägas mot varandra. Här kommer inte maximering av signal/brus-förhållandet behandlas, utan vi hänvisar till Mott (2007), kap. 8.

Optimeringsmetoderna kan bygga på i förväg gjorda beräkningar av lämpligt *fixt* polarisationsval i någon situation. Bättre prestanda kan förväntas av att tillgripa ett *adaptivt* förfarande, baserat på signalbehandling av insamlade data från målområdet.

En annan indelning av optimeringsmetoder, som kan göras här, är *stationära* respektive *rörliga* mål.

4.2.1. Fixa scheman

Två metoder för kontrastökning har föreslagits, den ena efter erfarenheter från polarimetriska radarsimuleringar medan den andra hämtat inspiration från biologin. Dessa beskrivs i följande två avsnitt.

4.2.1.1. Ortogonala sändar/mottagar-polarisationer

En grupp vid Army Reserach Laboratory, Adelphi, USA (Dogaru och Le, 2008) har gjort omfattande simuleringar av radarreturer genom vägg från en människa i ett rum. De fann att returen från personen var starkare relativt returerna från väggregflexerna inne i rummet, om sändar- och mottagarpolarisationerna var ömsesidigt ortogonala, "korspolarisationer" (t.ex. VH: Vertikal sändning, Horisontell mottagning). Vid lika sändar- och mottagarpolarisationer (t.ex. VV) var förhållandet det omvända, med bakgrundsreturerna de starkare. Signalnivån hos returen från människa med korspolarisation var emellertid ca 20 dB lägre än med lika polarisation. En korspolarisationsradar skulle därmed hantera extremt svaga signaler, vilka skulle kunna dränkas av brus. Metoden bör prövas praktiskt.

Fenomenologin bakom idén att använda sig av korspolarisation enligt ovanstående är att både reflektion från en flat yta och diffraktion från raka kanter ger nollbidrag i returspridningsriktningen i korspolarisation (Balanis, 1989). Eftersom en mänsklig kropp

uppvisar krökta och oregelbundna former skulle däremot den åstadkomma en starkare korspolariserad retur än väggar eller andra objekt med reguljära former, raka kanter och räta vinklar (Dogaru och Le, 2008)

I Avsnitt 4.3.3 ges exemplifiering av simuleringarna av Dogaru och Le.

4.2.1.2. Polarisationsdifferens

En grupp vid två universitet i Pennsylvania, USA har under en följd av år studerat och utvecklat metoder främst för polarimetrisk bildanalys, ursprungligen inspirerad från biologin (Rowe m.fl., 1995). Detta arbete kommer att beskrivas närmare i Avsnitt 4.3.1, speciellt med avseende på den framtagna adaptiva metodiken. Här skall nämnas en enklare icke-adaptiv variant, som föreslagits och studerats av gruppen, ursprungligen på optiska våglängder.

Metoden, PDI (*Polarisation Difference Imaging*) bygger på att man bildar en polarisationsdifferens av något slag ur mottagna fält- eller intensitetskomponenter (en polarisations-”metrik”), t.ex.

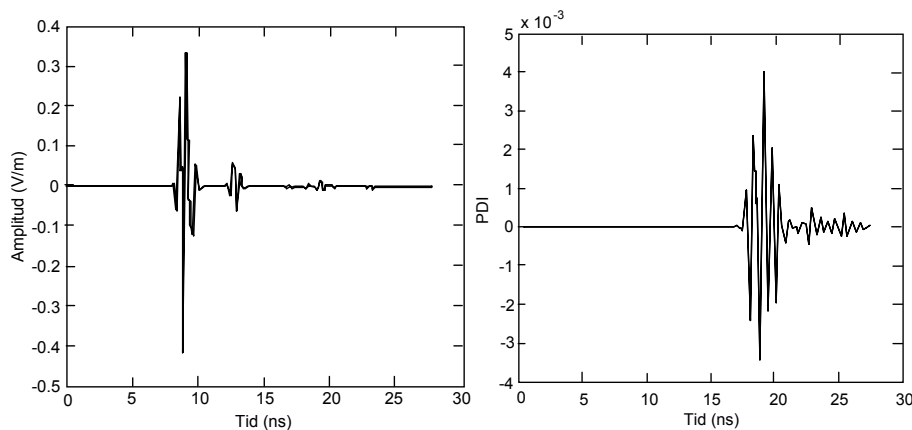
$$PDI = (|E_{\theta\theta}|^2 + |E_{\theta\varphi}|^2) - (|E_{\varphi\varphi}|^2 + |E_{\varphi\theta}|^2), \quad (4.1)$$

där $E_{\theta\theta}$, $E_{\theta\varphi}$ är de lika- och korspolariserade spridda elektriska fältstyrkorna från ett E_θ -polariserat (i elevationsled) infallande fält, samt $E_{\varphi\varphi}$, $E_{\varphi\theta}$ av ett E_φ -polariserat (i asimutled) infallande fält. Denna intensitetsbaserade metrik kan användas på bildelement i en bild. Även andra alternativa val är möjliga, t.ex.

$$PDI = E_{\theta\theta}(t) - E_{\varphi\varphi}(t). \quad (4.2)$$

Denna koherenta differens kan appliceras på tids- eller avståndssampel i en radarretur.

Uppenbarligen är PDI definierad enligt (4.1) lika med noll för ett symmetriskt, polarisationsokänsligt objekt (t.ex. en sfär) och $PDI \neq 0$ för ett icke-symmetriskt objekt (t.ex. en cylinder). Denna skillnad kan användas för att avlägsna väggeffekter, som illustreras i Figur 4.1. Målobjektet i detta exempel utgörs av en cylinder bakom en homogen betongvägg.



Figur 4.1. PDI- (*Polarisation Difference Imaging*) teknik tillämpad på numeriskt beräknade spridda fält från ett cylindermål (diameter 10 cm, längd 70 cm) placerad 1 m bakom en betongvägg med $\varepsilon_r = 7.66$ och $\sigma = 0.06$ S/m. Vänstra figurdelen visar den likapolariserade komponenten av det spridda fältet, medan den högra visar PDI-signalen, där den homogena väggens retur eliminerats. Observera de olika amplitudskalorna i de båda figurerna. (Efter Yemelyanov m.fl., 2009).

4.2.2. Adaptiva scheman

4.2.2.1. Spänningsekvationen

Hittills har vi behandlat radarvågor och mål som i stort sett fristående storheter, utan explicit koppling till egenskaperna hos ett radarsystem, och då speciellt antennen, som är den polarisationsdefinierande enheten. Vi skall nu föra in antennegenskaperna i beskrivningen, och hur de skall anpassas till målegenskaperna (adaption). Vi definierar polarisationen hos en

antenn som polarisationen hos den transmitterade vågen, då antennen används som sändarantenn. Matematiskt beskrivs den av samma tvådimensionella, komplexa vektor som används för vågbeskrivning, nämligen Jones' vektor (Appendix A, avsnitt A.4.1).

Vi behandlar enbart monostatiska fall, först ett stationärt då både målobjekt och radar är fixa.

Vid optimeringsproblem är det antennpolarisationerna hos sändar- och mottagarantennerna som optimeras, så att den mottagna signalen blir maximal. Matematiskt bildas den mottagna (komplexa) spänningen som skalärprodukten mellan den matematiska representationen av polarisationsvektorn för mottagarantennen och för vågen, som faller in mot antennen (se t.ex. Huynen, 1970, 1987; Mott, 2007). I radartillämpningar är denna senare våg resultatet av spridning av en våg med någon polarisation $\vec{e}_t$, som belyser ett mål med en spridningsmatris $\mathbf{S}$, som beskriver den polarisationstransformation som åstadkommes av spridningen. Polarisationsvektorn hos den spridda vågen blir $\mathbf{S}\vec{e}_t$, som multiplicerad skalärt med mottagarantennens polarisationsvektor ($\vec{h}$), ger den mottagna spänningen, som i matrisform blir

$$v = \vec{h}^T \mathbf{S} \vec{e}_t. \quad (4.3)$$

Polarisationsvektorerna representeras av komplexa 2×1 -matriser (kolumnvektorer). Symbolen T representerar transponering (utan komplexkonjugering).

De båda momenten spridning och mottagning kan ses som operationer på den infallande vågens polarisation, representerade matematiskt av operatorer (matriser), varför ordningen är betydelsefull.

Det bör här nämnas att spänningsekvationen i operatorformen (4.3), som man uppfattar som naturlig, har varit besvärlig att ge en logiskt konsistent formulering på matris- och vektorkomponentnivå, där man utför beräkningar. Svårigheterna baserar sig till stor del på att införa lämpliga koordinatsystem och i dem korrekt beskriva de tre ingående matriserna (vektorer) för infallande och spridd våg, resp. själva spridningen. En hel del polemik har förekommit i litteraturen rörande dessa problem, till vilkas lösning bl.a. arbeten av Lüneburg varit avgörande (t.ex. Lüneburg, 1995, 1996). Man bör stödja sig på nyare referenser, där svårigheterna bör vara klarlagda. Förutom nämnda artiklar av Lüneburg rekommenderas de båda nyligen publicerade böckerna av Mott (2007) samt av Lee och Pottier (2009). Huynens klassiska avhandling (1970, 1987) är också ett säkert val, med intuitiv känsla, fastän något föråldrad och mindre pedagogisk. Till dessa referenser bör fogas den helt nyligen publicerade boken av Cloude (2010). Denne kan nog sägas ha bidragit mest till vidareutvecklingen av polarisationsteorin från Huynens arbeten till dess nuvarande stadium.

4.2.2.2. Monostatiskt fall; tidskonstant mål; *con*-egenvärdesekvationen

Vi betraktar först ett enskilt mål, i det monostatiska fallet (returspridning). Det visar sig att den mottagna effekten blir maximal om antennpolarisationen vid mottagning är lika med den utsända, $\vec{e}_t$ (Mott, 2007, avsnitt 3.11), en co-polariserad kombination. Denna gemensamma optimala polarisation kan beräknas som lösningen till den s.k. *con*-egenvärdesekvationen (*con*- för *conjugate*) för målets spridningsmatris $\mathbf{S}$, som beskrivs i Appendix A, avsnitt A.4.3.1,

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^*. \quad (\text{A.4.7})$$

Storheten λ benämns *con*-egenvärde. Konjugeringen av polarisationsvektorn $\mathbf{x}$ i högerledet har att göra med att vågens utbredningsriktning kastas om. En åskådlig tolkning av lösningspolarisationen till denna ekvation kan göras med polarisationsellipser: den utsända polarisationen är polarimetriskt anpassad till målet, vilket medför att polarisationen inte ändras av spridningen i målet; polarisationsellipsen efter spridningen får samma form och lutning som före, se Figur A.4 i Appendix A. Det finns två ömsesidigt ortogonala lösningar, varav generellt den ena ger maximal effekt, medan den andra utgör ett submaximum. De båda lösningarna ligger diametralt motsatta på Poincarésfären (Appendix A, avsnitt A.4.3.2). De utgör ett par av målets *karakteristiska polarisationer*, de s.k. COPOL-max-polarisationerna.

När man har funnit den optimala polarisationen från (A.4.7) ges den optimala antennpolarisationen, normaliserat av

$$\vec{h} = \frac{(\vec{S}\vec{e}_{t,opt})^*}{\|\vec{S}\vec{e}_{t,opt}\|}, \quad (4.4)$$

där $\|\mathbf{x}\|$ indikerar normen av vektorn $\mathbf{x}$.

Det beskrivna optimum är behäftat med ett begränsande villkor, nämligen att sändar- och mottagarpolarisationerna är fixa; bättre optima kommer beskrivas i det följande.

4.2.2.3. Kontrasthöjning med spridningsmatrisformulering; konstanta mål

Ett steg mot ett mer komplext scenario än ett enskilt, stationärt mål som i föregående avsnitt, utgörs av två stationära mål i radarns synfält, där man vill särskilja målen genom att höja kontrasten mellan dem. Detta utgör ett typiskt radarproblem, och kan t.ex. bestå av ett mål som mäts upp mot en klotterbakgrund. Fallet har behandlats bl.a. av Kozlov (1979).

Problemet kan formuleras matematiskt som att finna

$$\max_{\vec{e}_t, \vec{h}} \frac{|\vec{h}^T \mathbf{S}_t \vec{e}_t|^2}{|\vec{h}^T \mathbf{S}_c \vec{e}_t|^2}, \quad (4.5)$$

där $\mathbf{S}_t$ är målets spridningsmatris och $\mathbf{S}_c$ är spridningsmatrisen för det oönskade objektet.

Om man kan finna sådana $\vec{h}, \vec{e}_t$ att

$$|\vec{h}^T \mathbf{S}_c \vec{e}_t|^2 = 0, \quad (4.6)$$

är optimeringen (4.5) löst. Det finns ett oändligt antal möjliga polarisationstillstånd som uppfyller (4.6), men om man begränsar sig till fallet då sändar- och mottagarpolarisationerna är identiska kommer lösningen till (4.6) att överensstämma med klotrets co-polariserade nollpolarisationer (COPOL-noll), som erhålls ur (A.4.10) i Appendix A, eftersom denna ekvation övergår i (4.6) efter multiplikation med $\mathbf{y}^T$ från vänster. Denna lösning är begränsad till fallet då de båda målen polarimetriska egenskaper inte ändras med tiden, vilket inte är det mest intressanta fallet i se-igenom-tillämpningen, där dopplerteknik applicerad på rörliga mål, med tidsvarierande spridningsmatriser, är en huvudinriktning.

4.2.2.4. Tidsvariabla mål; kontrasthöjning med Stokesvektorformalism

Medan man för stationära mål kan uppnå hög förstärkning av målkontrasten (Kozlov, 1979) är fallet med ett tidsvarierande mål mer komplicerat och den resulterande kontrastförbättringen beror starkt på radarmålens depolariserande (=minskande av polarisationsgraden) egenskaper.

Poelman (1981) formulerade tidigt ett optimeringssätt baserat på uppdelningen av returen från en tidsberoende spridare i en fullständig polariserad del och en opolariserad del (ekv. (A.5.18) i Appendix A). Poelmans benämning ”virtuell polarisationsadaptation” avser att adaptationen inte görs genom verklig adaptiv förändring av utsänd och mottagen antennpolarisation. Dessa utgörs av ortogonala, koherenta kanaler med vars hjälp man erhåller en komplett uppmätning av målets polarimetriska egenskaper. Optimeringen sker sedan med signalbehandling på de insamlade data i följande två steg.

1) I ett första steg väljs polarisationen hos den utsända vågen så att polarisationsgraden, P , hos den spridda vågen når ett maximum, d.v.s. den fullständigt polariserade komponenten blir maximal. Det är denna komponent som mottagarantennen kan anpassas till polarisationsmässigt, så att hela dess effekt mottas. Polarisationsgraden uttrycks med hjälp av Stokes’ vektor $\mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2, g_3)^T$:

$$P = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}{g_0}. \quad (A.5.15)$$

2) I ett andra steg väljs polarisationstillståndet hos mottagarantennen så att den är anpassad till (eller, vid undertryckning, är ortogonal mot) den polariserade komponenten av den spridda vågen.

Resultatet blir att mottagarpolarisationen är anpassad till den polariserade komponenten av den spridda vågen, och maximal effekt mottas. Om man vid mottagning väljer

polarisationstillståndet som är ortogonalt mot den polariserade komponenten hos den spridda vågen, minimeras den mottagna effekten, vilket kan utnyttjas för att uppnå kontrasthöjning.

Metoden har getts en matematisk formulering av Boerner m.fl. (1991).

4.2.2.5. Kontrasthöjning med kovariansmatrisformulering; stokastiskt (tidsvariabelt) fall

Mottagen effekt

Ofta har man i radarfallet tidsvariabla mål, där tidsvariationerna kan ges en statistisk beskrivning. För målets del är en användbar storhet dess kovariansmatris (Appendix A, avsnitt A.4.5.2), som kan definieras med hjälp av en målvektor $\mathbf{\Omega}_{4L}$ som bildas av spridningsmatriselementen

$$\mathbf{\Omega}_{4L} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.35})$$

Kovariansmatrisen definieras som ett ensemblemedelvärde

$$\mathbf{C}_4(0) = \langle \mathbf{\Omega}_{4L} \mathbf{\Omega}_{4L}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_{11}s_{11}^* \rangle & \langle s_{11}s_{12}^* \rangle & \langle s_{11}s_{21}^* \rangle & \langle s_{11}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{12}s_{11}^* \rangle & \langle s_{12}s_{12}^* \rangle & \langle s_{12}s_{21}^* \rangle & \langle s_{12}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{21}s_{11}^* \rangle & \langle s_{21}s_{12}^* \rangle & \langle s_{21}s_{21}^* \rangle & \langle s_{21}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{22}s_{11}^* \rangle & \langle s_{22}s_{12}^* \rangle & \langle s_{22}s_{21}^* \rangle & \langle s_{22}s_{22}^* \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.37})$$

Nollan som argument i $\mathbf{C}_4$ indikerar att medelvärdena av de olika produkterna av de tidsberoende matriselementen $\langle s_{ij}(t)s_{kl}^*(t) \rangle$, $(i, j, k, l = 1, 2)$ i högerledet bildas i samma tidpunkt, alltså specialfallet $\tau = 0$ av det allmännare $\langle s_{ij}(t)s_{kl}^*(t + \tau) \rangle$, $(i, j, k, l = 1, 2)$. Spänningsekvationen (4.3) ersätts med en motsvarande ekvation för mottagen effekt, som erhålles enligt följande.

Vi skriver om spänningsekvationen med hjälp av direkta produkten, $\otimes$, mellan två matriser (Arfken och Weber, 1999, s. 170): Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$ -matris och $\mathbf{B}$ är en $p \times q$ -matris, är den direkta produkten (Kroneckers produkt eller yttre produkten) $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ mellan matriserna blockmatrisen

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Exempelvis är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \\ 4 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} & 5 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} & 6 \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & 14 & 16 & 21 & 24 \\ 9 & 10 & 18 & 20 & 27 & 30 \\ 28 & 32 & 35 & 40 & 42 & 48 \\ 36 & 40 & 45 & 50 & 54 & 60 \end{pmatrix}.$$

Med den införda beteckningen har vi

$$V(t) = \vec{h}^T \mathbf{S}(t) \vec{e}_t = (\vec{h}^T \otimes \vec{e}_t^T) \begin{pmatrix} s_{11}(t) \\ s_{12}(t) \\ s_{21}(t) \\ s_{22}(t) \end{pmatrix} = (\vec{h}^T \otimes \vec{e}_t^T) \mathbf{\Omega}_{4L}(t) \equiv \vec{w}_4^\dagger \mathbf{\Omega}_{4L}(t), \quad (4.9)$$

där polarisationsvektorn

$$\vec{w}_4 \equiv \begin{pmatrix} h_1^* e_{t1}^* \\ h_1^* e_{t2}^* \\ h_2^* e_{t1}^* \\ h_2^* e_{t2}^* \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Medelvärde av mottagen effekt blir

$$\langle VV^\dagger \rangle = \langle \vec{w}_4^\dagger \mathbf{\Omega}_{4L}(t) (\vec{w}_4^\dagger \mathbf{\Omega}_{4L}(t))^\dagger \rangle = \langle \vec{w}_4^\dagger \mathbf{\Omega}_{4L}(t) \mathbf{\Omega}_{4L}^\dagger(t) \vec{w}_4 \rangle = \vec{w}_4^\dagger \mathbf{C}_4(0) \vec{w}_4, \quad (4.11)$$

vilket är den sökta effektekvationen.

I det monostatiska fallet, med returspridning, kan man använda sig av en reducerad 3×3 - kovariansmatris (Appendix A, avsnitt A.4.5.2)

$$\mathbf{C}_3(0) = \langle \mathbf{\Omega}_{3L} \mathbf{\Omega}_{3L}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_{11} s_{11}^* \rangle & \sqrt{2} \langle s_{11} s_{12}^* \rangle & \langle s_{11} s_{22}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle s_{12} s_{11}^* \rangle & 2 \langle s_{12} s_{12}^* \rangle & \sqrt{2} \langle s_{12} s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{22} s_{11}^* \rangle & \sqrt{2} \langle s_{22} s_{12}^* \rangle & \langle s_{22} s_{22}^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (A.4.39)$$

där

$$\mathbf{\Omega}_{3L} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \sqrt{2} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}. \quad (A.4.38)$$

Den 3-dimensionella motsvarigheten till 4.9) blir (vi slopar t -indexeringen av $\vec{e}_t$)

$$V(t) = \vec{h}^T \mathbf{S}(t) \vec{e} = (\vec{h}^T \otimes \vec{e}^T) \begin{pmatrix} s_{11}(t) \\ s_{12}(t) \\ s_{21}(t) \\ s_{22}(t) \end{pmatrix} \equiv \vec{w}_3^\dagger \begin{pmatrix} s_{11}(t) \\ \sqrt{2} s_{12}(t) \\ s_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

För att få de två sista ledens olika uttryck på spänningen lika krävs att den 3-dimensionella polarisationsvektorn $\vec{w}_3$ väljs som

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} h_1^* e_1^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (h_1^* e_2^* + h_2^* e_1^*) \\ h_2^* e_2^* \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Kontrasthöjningen

Vi önskar öka kontrasten mellan ett radarobjekt med kovariansmatrisen $\mathbf{C}_{3t}(0)$ relativt ett med matrisen $\mathbf{C}_{3c}(0)$. Kvoten mellan de mottagna effekterna från dessa båda mål är enligt den 3-dimensionella motsvarigheten till (4.5)

$$R_{tc} = \frac{\vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3t}(0) \vec{w}_3}{\vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3c}(0) \vec{w}_3}, \quad (4.14)$$

som vi önskar maximera. Detta görs med Lagranges multiplikatormetod (Arfken och Weber, 1995), som maximerar en funktion, i detta fall $\vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3t}(0) \vec{w}_3$, under ett bivillkor, i detta fall

$\vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3c}(0) \vec{w}_3 = c$. Bivillkoret statuerar att den mottagna effekten från måltypen indexerad ”c”, skall hållas konstant vid maximeringen. Lagrangefunktionen blir

$$L = \vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3t}(0) \vec{w}_3 + \lambda (\vec{w}_3^\dagger \mathbf{C}_{3c}(0) \vec{w}_3 - c), \quad (4.15)$$

där λ är Lagranges multiplikator och c en konstant. Vi kan lösa maximeringsproblemet genom att sätta den partiella derivatan $\partial L / \partial \vec{w}_3^\dagger = 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{w}_3^\dagger} = \mathbf{C}_{3t}(0) \vec{w}_3 + \lambda \mathbf{C}_{3c}(0) \vec{w}_3 = 0. \quad (4.16)$$

Detta leder till det generaliserade egenvärdesproblemet (Searle, 1982),

$$\mathbf{C}_{3t}(0) \vec{w}_3 = -\lambda \mathbf{C}_{3c}(0) \vec{w}_3. \quad (4.17)$$

De optimala polarisationsvektorererna är egenvektorererna som erhålls från (4.17). Maximala kvoten R_{tc} ges av maximala egenvärdet. Problemet att maximera mottagna effekten från ett mål kan ses som ett specialfall av (4.14) där $\mathbf{C}_{3c}(0)$ är identitetsmatrisen och representerar kovariansmatrisen för vitt brus. Av (4.17) följer att i detta fall är de optimala polarisationstillstånden $\vec{w}_{3opt}$ egenvektorererna till kovariansmatrisen för målet $\mathbf{C}_{3t}(0)$.

Samma metodik kan användas för fallet med icke-monostatisk spridning eller för icke-reciproka mål, om målets kovariansmatris $\mathbf{C}_3(0)$ ersätts med $\mathbf{C}_4(0)$.

Den beskrivna metoden med kontrastökning baserad på kovariansmatrisen är lämplig i fallet stokastiska mål; i fallet icke-varierande mål bör man basera optimeringen på spridningsmatrisen, som beskrevs i avsnitt 4.2.2.3; se vidare diskussionen som förs av Moisseev (2002) sid. 38-44.

4.2.2.6. Optimering baserad på flera kontrastmått

Vid SAR-tillämpningar har olika metoder för polarimetrisk diskriminering mellan olika måltyper (t.ex. olika landtyper) prövats. I föreliggande arbete har någon översikt av dessa inte kunnat göras inom projektramen. Vi nämner en enda metod, som exempel på en möjlig generalisering av kontrastoptimering (Yang m.fl., 2004). Den går ut på att man inte bara kräver att kvoten mellan mottagen effekt från ett mål och från klotter är maximal. Man inför ytterligare en faktor, som beror av tre polarisationsparametrar, och kräver att kvoten mellan faktorn för målet och faktorn för klottret maximeras. Två av de tre polarisationsparametrarna är s.k. likhetsparametrar (Yang, m.fl., 2001), som utgör mått på likheten mellan två spridningsmatriser, och som definieras med utnyttjande av målvektorer. Den målvektor som används har komponenter som definieras av spridningsmatriselementen s_{ij} för målet på följande sätt (Appendix A, avsnitt A.4.5.1)

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s_{11} + s_{22} \\ s_{11} - s_{22} \\ 2s_{12} \end{pmatrix}. \quad (A.4.24)$$

För två spridningsmatriser $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ med målvektorerna $\mathbf{k}_1$ resp. $\mathbf{k}_2$ definieras likhetsparametern som

$$\mathbf{r}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \frac{|(\mathbf{k}_1^*)^T \mathbf{k}_2|^2}{\|\mathbf{k}_1\|_2^2 \|\mathbf{k}_2\|_2^2}, \quad (4.18)$$

där $\|\cdot\|_2^2$ betecknar kvadratsumma av absolutvärdena hos vektorns komponenter.

De två koefficienterna väljs i den speciella tillämpningen att uttrycka likheten mellan en uppmätt spridningsmatris i målscenen och en reflektor bestående av ett reflekterande plan (enkelstuds-mål) resp. en dieder (dubbelstuds-mål); man förväntar sig finna dessa båda spridartyper i tillämpningen. Den tredje parametern väljs som polarisationsentropin, H , (uttrycket (A.6.4) i Appendix A), som erhålles ur kovariansmatrisen. Den är ett mått på måls slumpmässighet.

Metodiken avser alltså att för två mål påvisa skillnader rörande enkel- och dubbelreflektioner samt slumpmässighet. Yang m.fl. fann att optimeringsmetoden var effektiv i att detektera vägar i ett skogsområde.

För övrigt hänvisar vi till Lee och Pottiers bok (2009) för en översikt av andra metoder som prövats för SAR.

4.2.2.7. Kontrasthöjning med dopplerpolarimetri

För varje depolariserande mål är polarisationsegenskaperna olika för olika dopplerfrekvenser. Dopplerprocessering kan behandlas som en koherent måluppdelningsteknik, som representerar ett mål som en mängd av inte lika mycket depolariserande mål. Därför kommer en polarisationsoptimering för varje dopplercell generellt att ge bättre kontrastökning än samma procedur applicerad på hela målet. Följande behandling är huvudsakligen tagen från Moiseev (2002). Dennes beskrivning går från ett enkelt, stationärt fall, över stokastiskt fluktuerande mål, till tekniker där dopplerpolarimetri kommer till sin rätt.

Följande behandling är en generalisering av avsnitt 4.2.2.5. Antag att vi har två rörliga radarmål med polarisationsegenskaper, som är olika för olika dopplerfrekvenser. Deras polarisationsegenskaper beskrivs som tidigare med kovariansmatriser, men generaliserade för att kunna inkludera variationerna i spektralplanet. Vi antar att radarmålen är stationära i statistisk mening. Kovariansmatrisen definieras som tidigare som ett medelvärde av en yttre produkt mellan en målvektor vid en viss tidpunkt och det hermiteska konjugatet av samma vektor i en tidpunkt åtskild från den förra med ett tidsintervall τ (i långsam tid i Figur 2.2). Målvektorn utgörs som tidigare av elementen i en målvektor vilka utgörs av spridningsmatriselement

$$\mathbf{\Omega}_{3L} = (s_{11} \quad \sqrt{2}s_{12} \quad s_{22})^T. \quad (\text{A.4.38})$$

Resultatet blir att komponenterna i matrisen blir korrelationsfunktioner, funktioner av tidsintervallet τ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3(\tau) &= \langle \mathbf{\Omega}_{3L}(t) \mathbf{\Omega}_{3L}^\dagger(t+\tau) \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \langle s_{11}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{11}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \langle s_{11}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \\ \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & 2 \langle s_{12}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \\ \langle s_{22}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{22}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \langle s_{22}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.43})$$

Här ingår alltså medelvärden av produkter mellan målets spridningsmatriselement.

En doppleranalys görs främst i spektraldomänen. Transformation från tidsdomänen $\mathbf{C}(\tau)$ till en spektral kovariansmatris $\mathbf{F}(\omega)$ sker som ovan med hjälp av Wiener-Khinchins teorem (t.ex. McDonough och Whalen, 1995), en Fouriertransform, vilket ger matriselementen

$$F_{jk}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} C_{jk}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \text{ med inversen} \quad (\text{A.4.44a})$$

$$C_{jk}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{jk}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (\text{A.4.44b})$$

där $j, k=1,2,3$.

Antag att vi har två radarobjekt med spektrala kovariansmatriser $\mathbf{F}_t(\omega)$ resp. $\mathbf{F}_c(\omega)$. Kvoten mellan mottagna effekterna, $\mathbf{P}_t$ resp. $\mathbf{P}_c$ från målen, är

$$R_{tc} = \frac{P_t}{P_c} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_t(\omega) \vec{\mathcal{G}}_3(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_c(\omega) \vec{\mathcal{G}}_3(\omega) d\omega}, \quad (4.19)$$

där $\bar{\mathcal{G}}_3(\omega)$ representerar ett polarisationstillstånd för dopplerfrekvensen ω . Vi har för enkelhets skull begränsat oss till fallet med reciproka mål med kovariansmatriser med dimensionen 3×3 . För att optimera effektkvoten tillgriper vi som tidigare Lagranges multiplikatormetod. I detta fall är Lagrangefunktionen

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_t(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega) d\omega + \lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_c(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega) d\omega - c \right), \quad (4.20)$$

där λ är Lagranges multiplikator och c är en konstant. Vi kan skriva om detta uttryck som

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_t(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega) + \lambda (\bar{\mathcal{G}}_3^\dagger(\omega) \mathbf{F}_c(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega) - \frac{c}{4\pi}) \right] d\omega. \quad (4.21)$$

Eftersom de spektrala kovariansmatriserna är Hermiteska positiva semi-definita kan vi ta bort integraltecknet (Moisseev, 2002). Därmed kan vi lösa detta problem genom att finna de optimala polarisationsvektorer för varje dopplerfrekvens. Denna lösning erhålls genom att man sätter den partiella derivatan $\partial L / \partial \bar{\mathcal{G}}_3^\dagger = 0$, där $L(\omega)$ är lagrangefunktionen som funktion av ω . Detta ger det generaliserade egenvärdesproblemet (Searle, 1982)

$$\mathbf{F}_t(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega) = -\lambda \mathbf{F}_c(\omega) \bar{\mathcal{G}}_3(\omega). \quad (4.22)$$

De optimala polarisationsvektorer $\bar{\mathcal{G}}_{3opt}(\omega)$ är egenvektorer som erhålles från (4.22). Den maximala kvoten R_{tc} ges av (4.19), där polarisationstillståndsvektorer ersätts av $\bar{\mathcal{G}}_{3opt}(\omega)$.

I ett exempel på tillämpning av ovanstående teori på mätningar av en motorväg (jfr avsnitt 4.3.2.6), där det gällde att undertrycka klotter, uppnådde man i genomsnitt 2.75 dB förbättring vid användning av denna dopplerpolarimetriska metodik, jämfört med enbart polarimetri (Moisseev, 2002, avsnitt 5.7). För enskilda mål kunde skillnaderna vara så stora som 10 dB i detta exempel.

4.3. Specifika studier

Vi skall efter den genomgångna allmänna teoridelen beskriva publicerade arbeten, som representerar två huvudspår inom radartekniken, med polarimetri inkluderad, båda relevanta för vår tillämning.

I det första arbetet utvecklas en metod, ursprungligen inspirerad av iakttagelser i biologin, som avser bildalstrande, icke-Dopplerbaserad förändringsdetektion med gruppantenn.

I det andra arbetet kombineras radarpolarimetri med dopplertechnik, med tillämpning på icke-bildalstrande radarmätningar med en antenn.

4.3.1. Adaptiv metod med gruppantenn

En grupp med forskare från två universitet i Pennsylvania (University of Pennsylvania i Philadelphia, samt Villanova University i Villanova) är den som publikationsmässigt varit mest framträdande rörande studier av polarisation vid se-igenom-vägg. Gruppen har närmast sig denna tillämpning från optiksidan, med inspiration från biologi (Wehner, 2001). De har utarbetat algoritmer för polarimetrisk bildastring, som ger förbättrad målupptäckt jämfört med icke-polarimetrisk.

Tanken i metoden är att man gör en statistisk analys, med användning av principalkomponentanalys (PCA; se t.ex. Webb, 2002), av polarisationsegenskaperna hos en uppmätt bakgrundscen, med vars hjälp man sedan sammansätter nya adaptiva signaler. Dessa signaler ger bättre igenkänning av ett målobjekt mot bakgrunden än de som ursprungligen samlades in.

Ursprungligen arbetade man med optisk bildalstring och införde en metodik (Rowe m.fl., 1995; Tyo m.fl., 1996) som utnyttjade polarimetrisk differens för bildalstringen (PDI, *Polarisation Difference Imaging*), se avsnitt 4.2.1.2. En PDI-sensor skapar här två bilder av en scen i två ortogonala linjära polarisationer. Intensiteten i bilderna betecknas med $I_0(x, y)$

resp. $I_{90}(x, y)$, tagna med 0° resp. 90° polarisationsfilterorientering. Med dessa skapar man två nya bilder genom att bilda linjärkombinationer av dem, nämligen en summabild, $PS(x, y) = I_{90}(x, y) + I_0(x, y)$, och en differensbild $PD(x, y) = I_{90}(x, y) - I_0(x, y)$, eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} PS(x, y) \\ PD(x, y) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} I_{90}(x, y) \\ I_0(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

där $\mathbf{T}$ definierar en transformationsmatris.

Tyo (1998) har visat att de båda bildkanalerna PS och PD är principalkomponenter hos en mätsken med likformigt fördelad orienteringsvinkel hos polarisationsellipsen. I detta fall utgör PS och PD optimala kanaler i informationsteoretiskt hänseende, i det att de innehåller maximal, okorrelerad information om scenen. Transformationsmatrisen $\mathbf{T}$ erhålles genom att man gör en principalkomponentanalys av kovariansmatrisen för inkanalerna I_0 och I_{90} , med en bredbandig fördelning hos relevant egenskap (polarisation, spektral fördelning). Principalkomponenten svarande mot största egenvärdet är en summa med lika tecken av inkanalerna, medan återstående komponenter, ”opponenter”, innehåller viktskoefficienter med motsatta tecken i transformationsmatrisen. Opponentkanalerna kan också ses som optimala för detektion av förändring relativt medelvärdesscenen, som den första principalkomponenten är avstämmd för. I opponentkanalerna spärras den statistiskt oberoende medelvärdesscenen eller bakgrundssignalen, vilket höjer signal-bruskvoten, och därmed förmågan att upptäcka mål i en scen vars polarisationsstatistik skiljer sig från bakgrunden.

Gruppen i Pennsylvania har vidareutvecklat den beskrivna metodiken till fallet då polarisationsstatistiken i bilderna är icke-likformig, och har utvecklat en algoritm för adaptiv anpassning av det avbildande systemet till polarisationsstatistiken hos bakgrunden, så att förändringar i scenen, t.ex. genom ett uppträdande målobjekt, framträder tydligare i en av kanalerna (Yemelyanov m.fl., 2006). Målet betraktas som en perturbation, en mindre förändring, som inte förändrar den totala polarisationsstatistiken. Man har också flyttat över metodiken till mikrovågsområdet, och mer specifikt till fallet se-igenom-vägg med radar (Yemelyanov m.fl., 2009). Man utnyttjar fasinformation och antar att radarn är koherent, och att den är utrustad med en gruppantenn.

Grundtanken är att man som ett första steg kartlägger statistiska egenskaper hos polarisationen för radarreturen från målscenens bakgrund. Detta använder man senare för att optimera förmågan att detektera och känna igen målobjekt, som uppträder i denna bakgrund. Idealt bör man därför ha möjlighet att utan målobjekt belysa det framtida målområdet med radarn. Gruppantennen antas ha egenskapen att man för varje antennelement kan ta mot i två ortogonala linjärpolarisationer, med amplitud och fas. Man belyser scenen från någon sändarantenn med en horisontellt eller vertikalt polariserad *monokromatisk* våg och samlar in i varje element av gruppantennen storheterna $|E_\theta|, \Phi_\theta, |E_\varphi|, \Phi_\varphi$, där $|E_\theta|, \Phi_\theta$ är amplitud och fas hos vertikal- (elevations-) komponenten av den återspridda elektriska fältstyrkan, och $|E_\varphi|, \Phi_\varphi$ är motsvarande storheter för horisontal- (asimut-) komponenten. Med dessa data bildar man sedan syntetiskt utsignalen från två virtuella, linjärpolariserade mottagarkanaler, som är orienterade med godtyckliga vinklar ψ_1 och ψ_2 relativt en referensriktning. Dessa utsignaler F_b^1, F_b^2 (index b avser bakgrund) fås genom projektioner av de vertikal- och horisontalpolariserade komponenterna som

$$\begin{aligned} F_b^1(\psi_1) &= \left| |E_\varphi| e^{i\Phi_\varphi} \cos \psi_1 + |E_\theta| e^{i\Phi_\theta} \sin \psi_1 \right|, \\ F_b^2(\psi_2) &= \left| |E_\varphi| e^{i\Phi_\varphi} \cos \psi_2 + |E_\theta| e^{i\Phi_\theta} \sin \psi_2 \right|, \end{aligned} \quad (4.24)$$

där $0^\circ \leq \psi_1$ och $\psi_2 \leq 180^\circ$. En uppsättning av optimala signaler, med optimala orienteringsvinklar hos mottagarantennerna, kan erhållas som en linjärkombination av F_b^1, F_b^2 med vissa viktskoefficienter. För detta använder man principalkomponentanalys. Därvid antar man en gruppantenn med $M \times N$ mottagarelement, och beräknar de två

signalerna $F_b^1(\psi_1), F_b^2(\psi_2)$ för varje element och erhåller alltså dem i $M \times N$ rumspunkter. Man bildar kovariansmatrisen (symmetrisk) för detta signalpar,

$$C(\psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} W[F_b^1 F_b^1] - W^2[F_b^1] & W[F_b^1 F_b^2] - W[F_b^1]W[F_b^2] \\ W[F_b^1 F_b^2] - W[F_b^1]W[F_b^2] & W[F_b^2 F_b^2] - W^2[F_b^2] \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

där

$$W[F] = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F(x_m, y_n), \quad (4.26)$$

är medelvärde över ensemblen av mottagarelement och F representerar F_b^1 och F_b^2 eller deras produkt.

När egenvärdena (λ_1, λ_2) och egenvektorererna till kovariansmatrisen C har bestämts, erhåller man transformationsmatrisen, som har egenvektorererna som rader,

$$\mathbf{T}(\psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} -\beta(\psi_1, \psi_2) & \alpha(\psi_1, \psi_2) \\ \alpha(\psi_1, \psi_2) & \beta(\psi_1, \psi_2) \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Den första egenvektorn svarar mot största egenvärdet. PCA genomförs på signalerna F_b^1 och F_b^2 , svarande mot alla möjliga kombinationer av orienteringsvinklar hos mottagarelementen. PCA ger fyra parametrar, nämligen de båda elementen i (4.27) som bildar egenvektorererna och som fungerar som adaptiva, multiplikativa koefficienter, α, β , samt de båda egenvärdena λ_1, λ_2 . Alla dessa koefficienter är funktioner av ψ_1 och ψ_2 . I fallet med likformig fördelning av polarisationsellipsorienteringarna reduceras $\mathbf{T}$ enligt (4.27) till den enkla formen i (4.23), d.v.s. de båda optimala kanalerna utgörs av en skillnads- och en summakanal. Uttrycket (4.27) utgör en generaliserad form av optimering, med viktskoefficienter skilda från +1 och -1 som i (4.23).

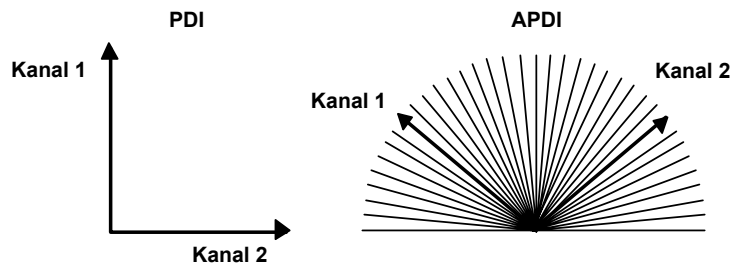
PCA ger ingen optimering av dessa vinklar, vilket man eftersträvade i detta arbete. Man tillgrep en empirisk prövning av några metoder för att välja vinklarna, så att en praktiskt optimal separation erhöles av mål från en specifik bakgrund (se Yemelyanov m.fl., 2006). Man fann att ett i detta avseende ”optimalt” val av vinkelpar, $\psi_1^{opt}, \psi_2^{opt}$, var det som maximerade egenvektorkomponenten α (och minimerade beloppet av β), och man erhöles därmed ”optimala” viktskoefficienter

$$\begin{aligned} \alpha^{opt} &= \alpha(\psi_1^{opt}, \psi_2^{opt}), \\ \beta^{opt} &= \beta(\psi_1^{opt}, \psi_2^{opt}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Efter denna uppmätning av och parameteranpassning till bakgrunden belyser man *målscenen* med samma signal, samlar in amplituder och faser hos radarreturerna i antennelementen, och bildar för varje element analogt med (4.24) två syntetiska signaler F_t^1 och F_t^2 , där index t avser mål (*target*). Principalkomponenterna för scenen bildas nu som

$$\begin{pmatrix} \text{PC}_1 \\ \text{PC}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^{opt} & \alpha^{opt} \\ \alpha^{opt} & \beta^{opt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t(\psi_1^{opt}) \\ F_t(\psi_2^{opt}) \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

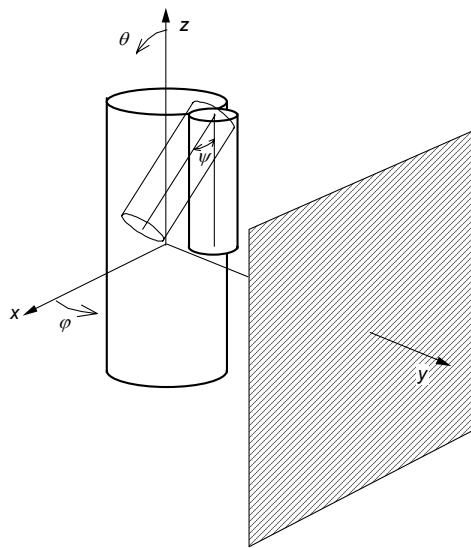
där matriselementen är koefficienterna som erhöles från *bakgrundsscenen*. PC_2 -bilden gav bättre mål-bakgrundsdiskriminering. Figur 4.2 visar en jämförelse mellan två fixa, vertikal- och horisontalpolariserade kanaler vid konventionell PDI med två fixa kanaler resp. de ”optimala” kanalerna vid det adaptiva tillvägagångssättet (APDI).



Figur 4.2 Konventionell bildalstring med polarimetrisk differens (PDI) med två fixa kanaler jämfört med adaptiv (APDI) med två optimala kanaler, anpassade till polarisationsstatistiken hos scenen (efter Yemelyanov m.fl., 2009).

Om i målscenen själva målet enbart upptar en liten del av hela scenen, kommer adaptiva koefficienter och optimala vinkelpar som erhålls från en ren bakgrundsscen att skilja sig obetydligt från dem som erhålles från statistiken från scenen med målobjektet. Då kan APDI-algoritmen tillämpas direkt på målscenen utan att man samlar ytterligare information från bakgrunden. Om däremot målobjektet upptar en signifikant del av scenen, krävs en separat bakgrundsuppmätning.

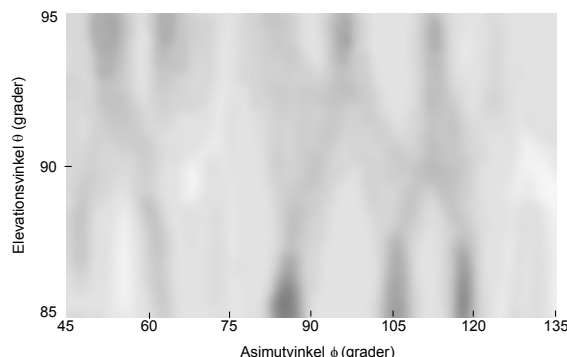
Yemelyanov m.fl. (2009) har gjort simuleringar av tillämpning av den beskrivna metoden på ett scenario bestående av en enkel modell av en bål med en arm (Figur 4.3), bakom en vägg av betong eller trä med tjockleken 0.1 m. Bålen och armen modelleras av två cirkulära cylindrar, fästa vid varandra i en punkt. Armdelen är vridbar kring fästpunkten, från lodriktningen ($\psi=0$ i Figur 4.3) i en rörelse där cylinderaxeln ligger i ett plan, parallellt med väggen. Cylindrarnas relativa permittivitet har valts att representera muskelmaterial, med $\varepsilon_r = 52 + 10.8i$, vilket svarar mot konduktiviteten $\sigma=1.2$ S/m vid den antagna frekvensen 2.0 GHz. Cylindrarna befinner sig 1 m bakom väggen som har oändlig utsträckning.



Figur 4.3. Simuleringsmodell av bål och arm, vilka modelleras med dielektriska cylindrar (efter Yemelyanov m.fl., 2009).

Modellen användes för FDTD-beräkningar (*Finite Difference Time Domain*) av det spridda fältet vid mottagarantennelementen, som antogs ligga i fjärrfältet för målspridningen. Beräkningarna gjordes kring normalen till väggen ($\theta=\varphi=90^\circ$) inom en sektor $85^\circ \leq \theta \leq 95^\circ$ och $45^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$. Som bakgrundsscen valdes positionen där armen är lodrät. Målscener skapades med olika utvridningsvinklar ψ . För varje scen skapades de två principalkomponenterna PC_1 och PC_2 i (4.29) enligt den tidigare beskrivna proceduren, vilket gav 2-D-bilder över $|PC_1|$ och $|PC_2|$ som funktion av bildkoordinaterna θ, φ (elevation och asimut). Ett exempel visas i Figur 4.4, som är en skiss av ett färgoriginal i

Yemelyanov m.fl. (2009). Den visar en $|PC_2|$ -bild som funktion av θ och ϕ i gruppantennplanet hos mottagaren, för en armutvridning $\psi=30^\circ$. Observera att PC-bilderna inte är några verkliga bilder av scenen, som t.ex. erhållits via någon lobformningsalgorithm. De visar värden hos PC_1 och PC_2 i antennelementpositionerna som funktion av positionernas asimut och elevation.

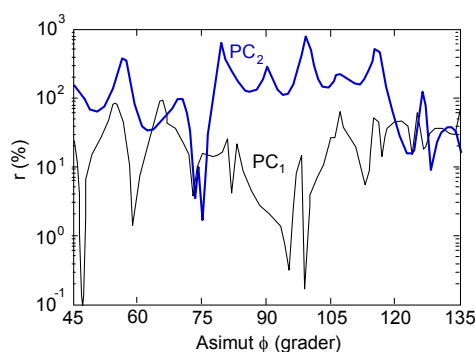


Figur 4.4. Grov, kvalitativ skiss av färgoriginalbild i Yemelyanov m.fl. (2009), som visar $|PC_2|$ -signalen i de olika antennelementen som funktion av deras asimut- och elevationsposition. Ökad svärtning i gråskalan betecknar ett större värde. Bilden gäller för en armutvridning $\psi=30^\circ$. Bilden skall tolkas tillsammans med andra, liknande bilder över PC_1 och PC_2 , och med olika målsituationer, se originalartikeln.

Man fann att fördelningen av PC_1 över bildkoordinaterna var mycket lik för alla armorienteringar och dominerades av väggen, medan fördelningen av PC_2 uppvisade signifikanta förändringar då armens orientering ändrades. Detta tolkades som att PC_2 effektivt mildrade väggens inverkan och dominerades av förändringar bakom väggen. För att ta fram denna tendens tydligare gjorde man en medelvärdesbildning över elevationsvinkeln θ och beräknade den procentuella skillnaden mellan mål och bakgrund för de båda principalkomponenterna som

$$r = 100 \frac{\langle PC_i^T \rangle - \langle PC_i^{BG} \rangle}{\langle PC_i^{BG} \rangle}, \quad (4.30)$$

där $i=1,2$ och $\langle PC_i^T \rangle$ och $\langle PC_i^{BG} \rangle$ är PC-signalerna hos mål- resp. bakgrundscenen, medelvärdesbildade över elevationsvinkeln θ . Figur 4.5 jämför fördelningen av r över asimutvinkelintervallet för båda principalkomponenterna för fallet då armutvridningen var $\psi=30^\circ$, och väggen var av betong, med $\epsilon_r = 6 + 0.54i$ ($\sigma=0.06$ S/m). Utsänd polarisation var linjär, vertikal.



Figur 4.5. Relativa skillnader mellan mål och bakgrund som funktion av asimutvinkel för de båda principalkomponenterna för modell av människa bakom betongvägg. Variationerna i komponent 2 är större än i komponent 1, och kan därför ge användbar information för detektion av förändringar i observationsscenen. (Efter Yemelyanov m.fl., 2009).

Man tolkade utseendet av de båda kurvorna så att variationerna i PC_2 i stort sett var mycket större än i PC_1 och att PC_2 därför kan ge mer användbar information för detektion av förändringar i observationsscenen.

Yemelyanov m.fl. (2009) undersökte också hur deras APDI-teknik stod sig i jämförelse med konventionell polarisationsmetodik, i detta fall att använda de korspolariserade komponenterna av det spridda fältet. Deras jämförelse gjordes med simulering av en metalldcylinder i fri rymd där man ändrade cylinderns orientering. Efter framtagning av samma typ av r -kurvor som i Figur 4.5 ovan fann man att PC_2 -signalen gav ett signifikant större mått (en storleksordning) på förändringar i målscenen, än samma storhet beräknad för det korspolariserade spridda fältet

$$r = 100 \frac{\langle E_{cross}^T \rangle - \langle E_{cross}^{BG} \rangle}{\langle E_{cross}^{BG} \rangle}. \quad (4.31)$$

Även en jämförelse med förmågan hos Stokes parametrar att detektera förändringar i en scen med två cylindrar visade att PC-signalerna verkade ha bättre diskrimineringsförmåga för förändringar (Yemelyanov, m.fl., 2005).

Den beskrivna APDI-algoritmen utvecklades för en monokromatisk infallande våg. Yemelyanov m.fl. (2009) har också beskrivit ett ekvivalent förfarande i det transienta fallet, där de genomför de beskrivna beräkningarna av principalkomponenterna som funktion av tiden i specifika, diskreta tidsintervall. Dessutom bortser de från fasinformationen och använder bara amplituden i de lika- och korspolariserade komponenterna hos det spridda fältet, $\tilde{E}_\theta$ och $\tilde{E}_\varphi$, i mottagarantennens plan med sina element, som samlar in dessa komponenter. Vid varje tidssteg $t_n = n\Delta t$ har man alltså ett amplitudpar i $m \times k$ rumspositioner, svarande mot gruppantennelementen. Med dessa amplituder kan man syntetisera utsignalen från en mottagare med ingången kopplad till en antenn med en godtycklig orientering ψ av polarisationsplanet

$$\tilde{E}(t_n, \psi) = \tilde{E}_\varphi(t_n) \cos \psi + \tilde{E}_\theta(t_n) \sin \psi. \quad (4.32)$$

Den adaptiva metodiken för det transienta fallet (TADPI) görs nu analogt med ADPI enligt följande steg.

- 1) Generera för varje tidssteg en ”bakgrundscen”, som utgörs av en uppsättning par av signaler enligt (4.32), d.v.s. $\tilde{E}(t_n, \psi_1)$ och $\tilde{E}(t_n, \psi_2)$, där ψ_1 och ψ_2 är orienteringsvinklar hos polarisationsplanet av två godtyckliga mottagarantennar (eller virtuella kanaler).
- 2) Tillämpa PCA-algoritmen på signalerna i varje tidslucka vilket ger fyra adaptiva parametrar, d.v.s. egenvärden λ_1, λ_2 och koefficienter α_n, β_n som funktion av vinklarna (ψ_1, ψ_2) .
- 3) Finn de optimala orienteringarna hos mottagarantennerna vid varje tidsmoment t_n , d.v.s. $\psi_{1n}^{opt} = \psi_1^{opt}(t_n)$ och $\psi_{2n}^{opt} = \psi_2^{opt}(t_n)$ med motsvarande optimala adaptiva koefficienter $\alpha_n^{opt} = \alpha(\psi_{1n}^{opt}, \psi_{2n}^{opt})$, $\beta_n^{opt} = \beta(\psi_{1n}^{opt}, \psi_{2n}^{opt})$.
- 4) Med användning av den andra uppsättningen temporala data, ”målscenen”, konstruera de två utsignalerna för det optimala vinkelparet ψ_{1n}^{opt} och ψ_{2n}^{opt} vid varje tidsmoment t_n ,

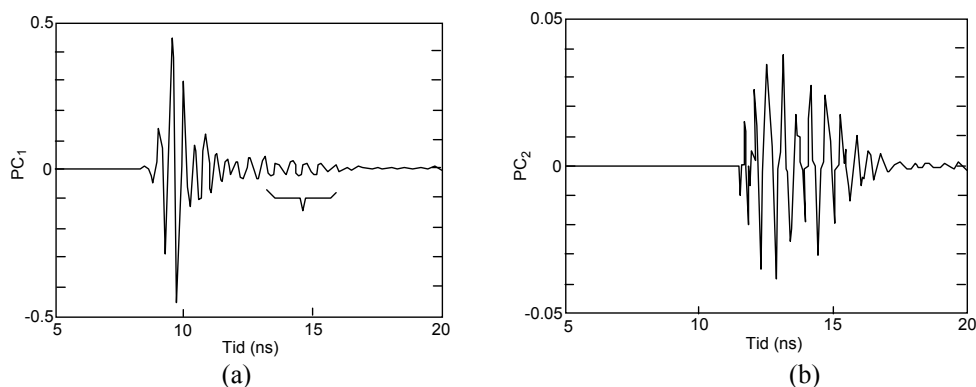
$$\begin{aligned} PC_1(t_n) &= -\beta_n^{opt} \tilde{E}(t_n, \psi_{1n}^{opt}) + \alpha_n^{opt} \tilde{E}(t_n, \psi_{2n}^{opt}), \\ PC_2(t_n) &= \alpha_n^{opt} \tilde{E}(t_n, \psi_{1n}^{opt}) + \beta_n^{opt} \tilde{E}(t_n, \psi_{2n}^{opt}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

där PC_1 och PC_2 är principkomponenterna hos scenen i ett visst tidsögonblick t_n , och $\tilde{E}(t_n, \psi)$ är utsignalerna från de båda antennerna, tagna från målsce data.

Genom att observera tidsvariationer hos principkomponentsignalerna $PC_1(t_n)$ och $PC_2(t_n)$ kan under vissa omständigheter närvaro av ”målobjekt” eller en förändring hos dem detekteras.

Ett simulerat exempel på tillämpningen av TADPI-algoritmen ges av Yemelyanov m.fl. (2009), bestående av en perfekt ledande cylinder bakom en vägg. Av de framtagna tidssignalerna $PC_1(t_n)$ och $PC_2(t_n)$ enligt schemat ovan uppvisar den förra dominerande returer både från väggens fram- och baksida, med en svagare målsignal, medan i $PC_2(t_n)$ är de båda väggreturerna eliminerade medan målreturen kvarstår. För figurer hänvisas till originalartikeln.

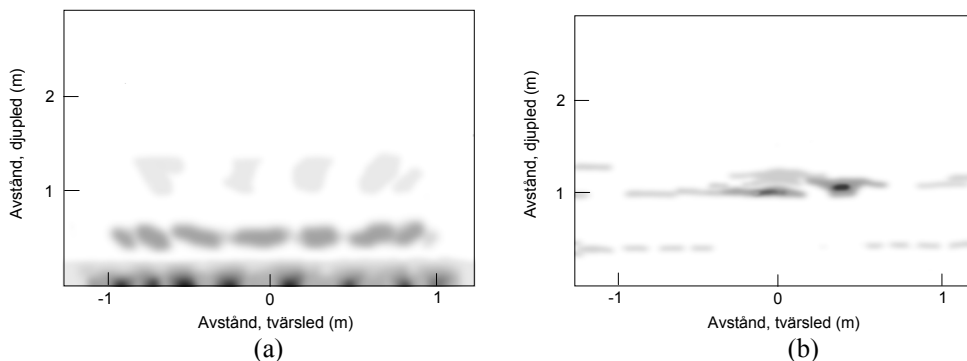
Som en svårare tillämpning studerar Yemelyanov m.fl. (2009) fallet en stillastående människa bakom en vägg av en 20.3 cm tjock vägg av slaggbetongblock (*cinder-block*) med håligheter. Blocken bildar en heterogen väggtyp med många skiljeitor mellan luft och vägg, där det uppstår en komplicerad reflektionsbild med interferenser (se Sume och Nilsson, 2008, avsnitt 4.4). En kommersiellt tillgänglig modell av människa användes för målsimuleringen; fältberäkningarna gjordes med FDTD. Man simulerade belysning med en gaussisk lob över ett frekvensband 0.8-3.0 GHz och beräknade det spridda fältet i fjärrfältet. Vid denna simulering innehöll både den antagna mål- och bakgrundscenen människan stående bakom väggen, men med horisontell resp. vertikalpolariserad belysning. Detta alternativa TAPDI-förfarande ansåg man vara användbar, då man inte hade tillgång till en ren bakgrundscen utan målobjekt. Principalkomponenterna för målscenen visas i Figur 4.6. Man ser att även om TAPDI tekniken är mest användbar vid homogena väggar, åstadkommer den ändå en avsevärd lindring av nämnda väggeffekter, genom att ge en PC_2 -signal som huvudsakligen alstras av närvaron av människan bakom väggen, i motsats till PC_1 -signalen.



Figur 4.6. Principalkomponenter för modell av stillastående människa bakom 20.3 cm tjock vägg av slaggbetong. Figurdel (a) visar den första principalkomponenten. Klammern anger returen från människan; den överskuggas av den i tiden föregående, dominerande returen från väggen. Figurdel (b) visar den andra principalkomponenten. Den orsakas huvudsakligen av människan bakom väggen. Dock finns fortfarande kvar något av ringningen i slaggbetongväggen och av interaktionen mellan människomodellen och väggen. (Efter Yemelyanov m.fl., 2009).

Yemelyanov m.fl. (2009) drar slutsatsen av detta resultat, att man potentiellt skulle kunna använda PC_2 -signalen i ett system med en 2-D gruppantenn med lobformning för att avbilda ett mål bakom en vägg, även om denna är en komplex vägg av ovanstående typ. Med dual-polariserade antennelement beräknar man då PC_2 för varje mottagarantennelement alstrad av en våg som sänds ut från samma position i gruppantennen. Författarna anger att en FDTD-simulering av ett sådant fall översteg publikationens målsättning. I stället demonstrerar de att enkel polarisationsinformation om scenen kan användas för att avslöja närvaron av en människa bakom väggen i ovanstående exempel. Detta görs med konventionell lobaformning med fördröjning och summering i en linjär 1-D mottagargruppantenn 1 m framför väggen, med 31 element separerade en halv våglängd vid centerfrekvensen. Resultatet visas i Figur 4.7 (skisser av originalbilderna som är i färg). Man ser att målet

överskuggas av slaggbetongväggen i likapolariserade bilden, men framträder ohöljd med vägginverkan till stor del eliminerade i korspolarisationsbilden. De korspolariserade spridda fälten spelar en signifikant roll vid alstringen av PC_2 -signalen i TAPDI-analysen.



Figur 4.7. Avbildning med lobformning av en 1-D gruppantenn med 31 element, placerade 1 m framför slaggbetongväggen. Ökad svärtning i gråskalan anger ökat värde. Figurdelen (a): Likapolariserad bild; väggreturen är dominant och överskuggar eventuell målretur. Figurdelen (b) Korspolariserad bild med vägginverkan till stor del eliminerad. Scenen upplyses med vertikalpolariserat fält. (Kvalitativa skisser efter originalbilder i färg i Yemelyanov m.fl., 2009).

4.3.1.1. Kommentarer till Pennsylvaniagruppens arbete

Pennsylvaniagruppen är den enda grupp som påträffats vid denna genomgång, som publicerat ett detaljerat arbete med genomarbetad teoretisk underbyggnad rörande polarisationstillämpning i se-igenom-vägg-tillämpningen, med mänskligt målobjekt bakom väggen. Dock demonstreras deras metodik på mikrovågsområdet enbart med simuleringar. Experimentell verifiering är ett starkt önskemål, och sådan är också planerad av gruppen.

Att gruppen närmast sig tillämpningen från optiken märks på sättet att optimera polarisationsvalet, där optimum definieras med positionsvinklar hos linjär polarisation (inställning av optiska polarisationsfilter). Radartillämpningen fördes in efter det att metodiken utarbetats för optisk tillämpning. Det finns flera sätt på vilket deras arbete kan vidareutvecklas. Som de påpekar, utgör deras ”optimala” vinkelpar inget absolut optimalt polarisationsval, eftersom det inte är genomfört analytiskt, utan de demonstrerar empiriskt och med (optiska) mätningar att det ger ett praktiskt optimum för diskriminering mellan mål och bakgrund. Dessutom håller de sig hela tiden till linjära polarisationer vid sökandet efter ett optimum. Bättre optima kan förväntas om man släppte denna inskränkning. Man borde undersöka om en sådan generellare optimering är genomförbar.

I det refererade arbetet används gruppantennelement för att bilda statistik för PC-analysen, applicerad på en kovariansmatris. Eftersom en eventuell experimentell utveckling vid FOI i första skedet torde använda enskilda antenner, måste man finna andra sätt att bilda denna statistik på.

4.3.2. Dopplerpolarimetri

4.3.2.1. Inledning

Som påpekades i samband med den inledande scenariobeskrivningen i avsnitt 2.1 utgörs en huvudsvarighet av att särskilja målobjekt och bakgrund i samma upplösningselement hos radarn, vilket motiverar att införa polarisationsdiskriminering. En annan diskrimineringsstorhet är dopplerdiskriminering vid rörliga objekt. En sammanvändning av dessa båda tillskott, *dopplerpolarimetri*, är ett naturligt steg, som kräver generaliseringar rörande vissa storheter som används i analysarbetet. I de följande avsnitten beskrivs sådana generaliseringar, samt hur de har använts i experimentella undersökningar som utnyttjat dopplerpolarimetri, dock inte i vår se-igenom-tillämpning.

4.3.2.2. Generalisering av radarvåg- och målbegrepp till tidsvariabla fall

Två storheter som erbjuder möjlighet för dataanalys i frekvens- (doppler) och polarisationsdomänen, som kommit till användning, är *koherensmatrisen* och *kovariansmatrisen* för beskrivning av vågor resp. mål. Dessa finns behandlade närmare i Appendix A, avsnitt A.5.1 resp. A.4.5.3, med referenser. Här använder vi några av de viktigaste matematiska resultaten.

4.3.2.3. Koherensmatrisen för en våg

Den koherensmatris, som normalt används i radarsammanhang, avser att beskriva de tidsvariationer som förekommer i polarisationen hos en kvasi-monokromatisk våg, alltså en våg med en viss bandbredd. Den definieras som ett medelvärde av yttre produkten mellan fältstyrkan $\mathbf{E}$ och dess hermiteska konjugat $\mathbf{E}^\dagger$,

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}^\dagger(t) \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_1(t) E_1^*(t) \rangle & \langle E_1(t) E_2^*(t) \rangle \\ \langle E_2(t) E_1^*(t) \rangle & \langle E_2(t) E_2^*(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.2})$$

Ensemblmedelvärdena, betecknade med $\langle \dots \rangle$, tas alltså av produkter mellan komponenter av den elektriska fältstyrkan, bildade vid samma tidpunkt t . För stationära processer är medelvärdena oberoende av denna tidpunkt. För att studera egenskaper hos tidsvariabla mål, t.ex. dopplerfenomen, inför man en generellare definition, där medelvärdet bildningen sker av produkter av fältkomponenterna, betraktade i två olika tidpunkter, separerade med ett intervall τ . Detta ger definitionsmissigt autokorrelations- eller korskorrelationsfunktioner med vilka man kan bilda matrisen (Perina, 1984)

$$\mathbf{J}(\tau) = \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}^\dagger(t + \tau) \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_1(t) E_1^*(t + \tau) \rangle & \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \\ \langle E_2(t) E_1^*(t + \tau) \rangle & \langle E_2(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.1})$$

Transformation till frekvensdomänen, där doppleranalysen lämpligen görs, ges av en fourierintegral, Wiener-Khinchins teorem (Perina, 1984; Moiseev m.fl., 2002)

$$F_{ij}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} J_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (\text{A.5.3})$$

med sin inversa form

$$J_{ij}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ij}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (\text{A.5.4})$$

där indexen $i, j = 1, 2, 3$. Detta ger en spektral koherensmatris

$$\mathbf{F}(\omega) = \begin{pmatrix} F_{11}(\omega) & F_{12}(\omega) \\ F_{21}(\omega) & F_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.5})$$

Vi kan notera att den traditionella definitionen enligt (A.5.2) av koherensmatrisen överensstämmer med den generellare definitionens specialfall $\mathbf{J}(0)$.

Om vågkomponenterna i (A.5.1) utgör en mottagen våg i ett radarfall har de skapats av målspridning. Om vi antar ett mål med en spridningsmatris $\mathbf{S}$, blir den i (A.5.1) ingående fältstyrkevektorn, i komponentform

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^t \\ E_2^t \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

där E_1^t, E_2^t är fältstyrkekomponenterna hos den utsända vågen och $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$ är elementen i $\mathbf{S}$, som för ett fluktuerande mål blir tidsberoende.

4.3.2.4. Dopplerpolarimetri baserad på koherensmatrisen

Koherensmatrisen erbjuder möjlighet till samhörig dataanalys i frekvens- och polarisationsdomänen. Någon användning i den här aktuella se-igenom-tillämpningen har

inte påträffats i litteraturen. Däremot har möjligheterna demonstrerats av en grupp vid Tekniska Universitetet i Delft, Holland, i tillämpningen markbaserad väderradar (Moisseev m.fl., 2000, 2001, 2002; Moisseev, 2002). Även om tillämpningen är en annan, bör delar av använd signalbehandlingsmetodik också kunna användas, eller åtminstone prövas, i se-igenom-tillämpningen, varför den beskrivs i korthet i tillämpliga delar i det följande. Fokus i beskrivningen utgörs av signalbehandlingsmetodiken. Beskrivningen inkluderar därför inte vägginverkan, utan här antas att radarloben vid mätningen är riktad nära vinkelrät mot väggen, som antas bestå av ett eller flera homogena skikt, varvid dess inverkan på polarisationen försummas. Inverkan kan behandlas som en polarisationsoberoende dämpning och fasförändring på grund av vågutbredningen genom väggmaterialet.

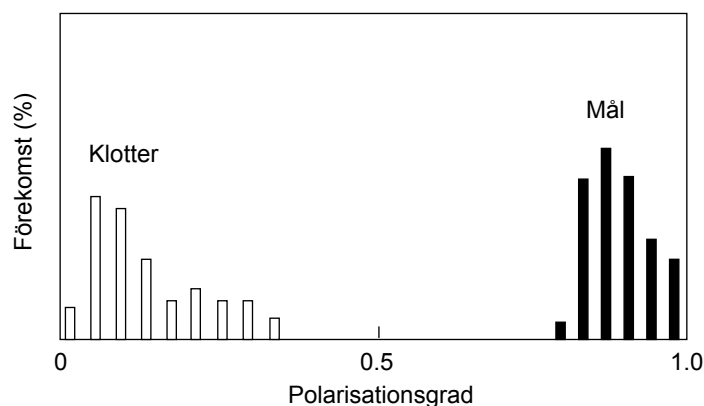
En storhet som potentiellt kan användas för diskriminering mellan ett mänskligt målobjekt och "klotter"-bakgrund är polarisationsgraden, som enligt Appendix A, avsnitt A.5.3, kan uttryckas i storheter, som är oberoende av vilken polarisationsbas man använder (t.ex. linjär eller cirkulär),

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{J}}{(\text{Tr} \mathbf{J})^2}}, \quad (\text{A.5.16})$$

där determinanten, $\det(\cdot)$ och spåret, $\text{Tr}(\cdot)$, av koherensmatrisen $\mathbf{J}(0)$ är basoberoende storheter.

Det förutsätts att radarn har avståndsupplösning, så att man kan skapa avståndsprofiler av radarreturen med ett antal avståndsceller (avstånds-"luckor") i radiell led. Det förutsätts också att radarn är fullpolarimetrisk, eller ekvivalent att mätmetodiken utformas så att man erhåller data med vilka man kan bilda en koherensmatris, för varje avståndscell. I varje cell har man generellt bidrag från bakgrundsreturer samt eventuellt någon målretur från ett (levande) mänskligt objekt. Det förefaller troligt att det kan föreligga en skillnad i polarisationsgrad från returer från dessa två spridarkategorier, med tanke på deras olika formgeometri och att målobjekten, men mera sällan bakgrunden, uppvisar någon typ av rörelse.

Figur 4.8 avser att ge en uppfattning av principen för att använda polarisationsgraden för diskriminering mellan mål och bakgrund. Figuren visar fördelningen av polarisationsgrad hos radarreturen från en avståndscell, i någon tillämpning där bakgrundsklotter och målobjekt har väsentligt olika fördelning. Fördelningarna kan ha alstrats t.ex. via avsökning i någon vinkelkoordinat. Polarisationsgraden beräknas ur koherensmatrisen för avståndscellen, och denna matris i sin tur beräknas genom medelvärdesbildningar enligt (A.5.2) av insamlingarna över den avsökta scenen.



Figur 4.8. Polarisationsgradens fördelning kan vara olika för mål och klotter, vilket utgör en möjlighet för diskriminering mellan dem.

I det visade fallet i Figur 4.8 fördelar sig polarisationsgraden hos klotterreturerna kring små värden, medan målreturerna har polarisationsgrad närmare ett. Man kan i ett sådant renodlat fall tillgripa en uppdelning av koherensmatrisen, i en fullständigt polariserad komponent och en opolariserad komponent, som är närmare beskrivet i Appendix A, avsnitt A.5.3. Efter uppdelningen kan man i detta tydliga fall bortse från matrisen, som svarar mot den opolariserade delen och som innehåller större delen av klotterbidraget, men ett mycket

litet bidrag från något målobjekt. Detta bidrag återfinns till större delen i den andra komponentmatrisen, som omvänt innehåller en mycket liten del av totala klotterreturen. Nettoresultatet av att enbart arbeta med denna kvarvarande, fullständigt polariserade matriskomponent är en klar vinst i signal-klotter-kvot, med konsekvenser för bl.a. detektionsprestanda.

Det beskrivna förfarandet har applicerats av Moisseev m.fl. (2002) i väderradarfallet, på fördelningar liknande dem som visas i Figur 4.8. Bakgrunden utgjordes av tidsfluktuerande markklotter, medan "målobjekten" utgjordes av aerosoler (regn, moln, smältande snö/is), i en och samma avståndscell. Nettoresultatet var en klar vinst i signal-klotter-kvot (3.35 dB) i HH-kanalen (horisontell sändning och mottagning). Här bör också nämnas att man som första moment i signalbehandlingen subtraherade från mätdata ett koherent medelvärde av dessa, bildat över en tid som var mycket större än korrelationstiden för målreturfluktuationerna. Dessa tog därvid ut varandra varför medelvärdet endast innehöll stabilt klotter, och då det subtraherades från mätdata, eliminerades denna komponent. Detta är ekvivalent med *nolldopplersubtraktion*, ett välkänt förfarande, som gav en klotterundertryckning i detta fall av 13 dB.

Nackdelen med det beskrivna tillvägagångssättet är att man arbetar med medelvärdesbildade intensiteter, så att informationen hos ett dopplerspektrum har gått förlorad. Lösningen till detta problem är att arbeta i spektraldomänen med en spektral koherensmatris enligt (A.5.3)-(A.5.5), och där tillämpa metoden på dopplerspektra. Relationen mellan matrisen $\mathbf{J}(0)$ och den spektrala koherensmatrisen är

$$J_{ij}(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ij}(\omega) d\omega. \quad (4.35)$$

I diskret form blir motsvarande uttryck, då hänsyn tas till att mättiden T är ändlig

$$J_{ij}(0) = \frac{1}{4\pi} \sum_k F_{ij}^{(T)}(\omega_k) \Delta\omega, \quad (4.36)$$

där $\Delta\omega \sim 1/T$ betecknar spektrala frekvens- (Doppler-)upplösningen.

Om man vill tillämpa vågupplösningsteoremet på dopplerspektrum enligt ovan (jfr Figur 4.8), bör man ha dopplerupplösningceller som är tillräckligt breda för att innehålla hela dopplerspektret för markklotret. Å andra sidan bör dopplerupplösningen vara tillräckligt hög för att tillåta en god uppskattning av t.ex. medelhastigheter och bredder. För varje dopplerupplösningcell beräknas polarisationsgraden samt den fullständigt polariserade och den fullständigt opolariserade returen.

4.3.2.5. Kovariansmatrisen för ett mål

Helt analogt med koherensmatrisen för en våg inför man generellt en kovariansmatris (Appendix A, avsnitt A.4.5.3), för att beskriva tidsegenskaperna av (i statistisk mening) stationära radarmål. Matrisen är ett medelvärde av yttre produkten mellan en målvektor bildad av spridningsmatriselement, $\mathbf{\Omega} = (s_{11} \quad \sqrt{2}s_{12} \quad s_{22})^T$, vid tidpunkten t och dess hermiteska konjugat vid en annan tidpunkt, åtskild från den förra med intervallet τ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\tau) &= \langle \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{\Omega}^\dagger(t+\tau) \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \langle s_{11}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{11}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \langle s_{11}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \\ \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & 2 \langle s_{12}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \\ \langle s_{22}(t) s_{11}^*(t+\tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{22}(t) s_{12}^*(t+\tau) \rangle & \langle s_{22}(t) s_{22}^*(t+\tau) \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.4.43)$$

Här ingår alltså medelvärden av produkter mellan målets spridningsmatriselement.

Doppleranalys görs främst i spektraldomänen. Transformation från tidsdomänens $\mathbf{C}(\tau)$ till en spektral kovariansmatris $\mathbf{F}(\omega)$ sker som ovan med hjälp av Wiener-Khinchins teorem, vilket ger matriselementen

$$F_{jk}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} C_{jk}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \text{ med inversen} \quad (\text{A.4.44})$$

$$C_{jk}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{jk}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (\text{A.4.45})$$

där $j, k=1, 2, 3$.

4.3.2.6. Måluppdelning av sammansatta mål med dopplerpolarimetri; entropibegreppet

Radarmål som förekommer i vår omgivning är oftast sammansatta, d.v.s. har en utsträckning i rummet. Då målet uppvisar någon sorts rörelse - translation, rotation etc. - kommer dess polarimetriska signatur att variera med tiden. En radarretur från det kan inte längre beskrivas med en konstant polarisationsellips, och målets spridningsmatris blir tidsberoende. Då rörelserna är oregelbundna får målreturen en stokastisk karaktär, bl.a. beroende på att returerna från spridningscentra hos målet kan uppvisa snabbt varierande interferenser. Målbeskrivningen görs med matriser, med element som innefattar medelvärdesbildningar, såsom ovannämnda kovariansmatris. En av de viktigaste framstegen inom radarpolarimetri har varit att utveckla metoder för dela upp sådana målmatriser i komponenter, som på något sätt representerar identifierbara delar hos målen själva, och i någon mån återinför en deterministisk beskrivning av dessa delar, som naturligtvis fysiskt fortfarande förblir deterministiska.

Ett exempel på en sådan uppdelning är den egenvektorbaserade uppdelningen av målets koherensmatris eller kovariansmatris, såsom beskrivs i Appendix A, avsnitt A.6.3. Grundtanken är att representera respektive matris som summan av tre komponenter, där varje komponent svarar mot en tidsberoende spridningsmatris, d.v.s. ett stationärt mål. Den fysikaliska basen för att välja målkomponenterna är att dessa blir statistiskt oberoende. Med hjälp av egenvärdena λ_i till målets koherensmatris $\mathbf{T}_3$ (definierad i Appendix A, avsnitt A.4.5.1, ekv. (A.4.29)) eller till dess ovan definierade kovariansmatris $\mathbf{C}(0)$, som har samma egenvärden som $\mathbf{T}_3$ (Lee och Pottier, 2009, avsnitt 3.3.5), kan man definiera ett måls entropi, H , enligt,

$$H = \sum_{i=1}^n -P_i \log_n P_i, \quad (\text{A.6.4})$$

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (\text{A.6.5})$$

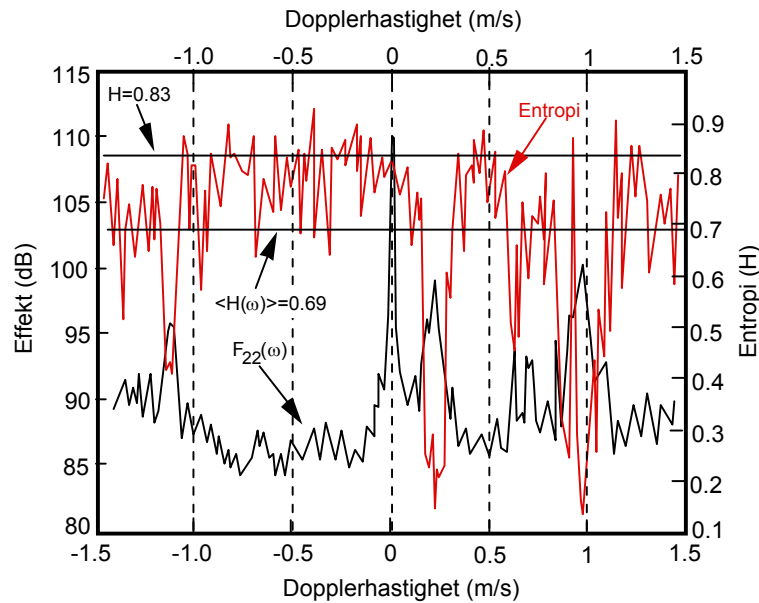
där n är den polarimetriska dimensionen, med $n=3$ i det monostatiska fallet, och $n=4$ i det bistatiska.

Målentropin, en skalär, kommer alltså från den koherenta måluppdelningen av $\mathbf{T}_3$ (Appendix A, avsnitt A.6.3) eller $\mathbf{C}(0)$, där ett depolariserande mål (ett som minskar polarisationsgraden) representeras av en uppsättning stationära mål med målareorna definierade av egenvärdena av $\mathbf{C}(0)$. Entropin är ett mått på den polarimetriska "oordningen" hos målet, d.v.s. hur stor del av den återspridda effekten som är opolariserad. Den har blivit en användbar parameter vid målklassificering, t.ex. med SAR (Mott, 2007; Lee och Pottier, 2009).

Användning av enbart polarimetrisk metodik kan leda fel vid tolkningen av dynamiska, sammansatta mål. Ett exempel ges i Appendix A, avsnitt A.6.3.1, av ett mål bestående av en sfär och en roterande dieder, vilket av en rent polarimetrisk radar, baserat på entropivärdet, kan tolkas som ett fullständigt stokastiskt mål i polarisationshänseende. Dopplerpolarimetri ger i det fallet en exaktare målbeskrivning, som genom tillförandet av den extra domänen, löser upp målet i denna, och återger dess sammansättning av deterministiska komponenter.

Man kan allmänt se en dopplerpolarimetrisk representation av ett mål som en koherent måluppdelning.

Ett exempel på ovanstående ges i Figur 4.9 av dopplerpolarimetriska mätningar av en motorväg med förekommande trafik, som gjorts av ovannämnda grupp vid Tekniska Universitetet i Delft (Moisseev m.fl., 2001; Moisseev, 2002). Figuren visar entropin som funktion av dopplerhastighet. De observerade fordonshastigheterna är inte verkliga dopplerhastigheter utan är invikta, då de verkliga betydligt översteg den högsta entydiga hastigheten för radarsystemet, som var en väderradar. Den brusliknande signalnivån på ca 85 dB orsakas av dekorrelationen av uppmätta signaler orsakade av den kontinuerliga förändringen av mål i radarvolymen. Man ser att entropin för bilar är låg, mellan 0.4 för retureterna vid -1.2 och 0.2 m/s, och 0.15 för signalerna vid 0.7 och 1 m/s. Marken har en entropi av ca 0.5. Entropin för den bruslika bakgrunden är ca 0.8. Medelvärdet för alla dessa mål är 0.69. Om alla dessa mål ses som kombinerade till ett enda, sammansatt mål får detta entropin 0.83, alltså betydligt större än den medelvärdesbildade entropin för alla separata mål. En sådan medelvärdesbildning sker i en rent polarimetrisk, icke dopplermätande radar. Förmågan att mäta dopplerhastighet har därmed betydelse vid metoder att öka målkontraster.



Figur 4.9. Mätning av motorvägs mål vid frekvensen 3.3 GHz. Svart kurva är dopplereffektspektrum för polarisationen HV. Röd kurva är entropin H som funktion av dopplerhastighet. Man ser att fordon har låg entropi och att entropin för samtliga mål sedda som ett sammansatt (0.83), är mycket högre än entropin för varje individuellt mål (4 bilar, marken, bakgrunds-nivån). (Skiss efter Moisseev, 2002, Figur 5.5. Speciellt de brusliknande, mindre fluktuationerna är återgivna förenklat.)

4.3.2.7. Koppling mellan doppler- och polarisationsegenskaper

Moisseev (2002) inför ett mått på koppling mellan doppleregenskaperna hos ett mål, och dess polarimetriska egenskaper. Avsikten är att använda måttet för mål-karakterisering/diskriminering.

För att karakterisera denna koppling utgår vi från ett idealt fall där målet inte uppvisar några förändringar i sina polarimetriska egenskaper, och följaktligen dessa är desamma för alla dopplerfrekvenser. I detta fall kan den spektrala kovariansmatrisen skrivas,

$$F_{ij}(\omega) = \xi(\omega) F_{ij}(\omega_0), \quad i, j=1..3, \quad (4.37)$$

där $F_{ij}(\omega_0)$ är spektrala kovariansmatrisen vid någon dopplerfrekvens ω_0 och $\xi(\omega)$ är en proportionalitetskoefficient. Med hjälp av (A.4.45) kan vi skriva målets kovariansmatris som

$$C_{ij}(0) = \frac{F_{ij}(\omega_0)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) d\omega. \quad (4.38)$$

Härav följer att då doppler- och polarisationsegenskaperna hos mål är oberoende, är den spektrala kovariansmatrisen $\mathbf{F}(\omega)$ proportionell mot kovariansmatrisen $\mathbf{C}(0)$ för alla dopplerfrekvenser

$$F_{ij}(\omega) = \eta(\omega) C_{ij}(0), \quad (4.39)$$

där $\eta(\omega)$ är proportionalitetskoefficienten.

För att härleda en parameter som indikerar en koppling mellan doppler- och polarisationsegenskaper hos mål studerar vi den spektrala bredden hos elementen av kovariansmatrisen $\mathbf{C}(\tau)$. Vi antar följande definition (Priestley, 1981),

$$\sigma_{ij} = 0.5 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |F_{ij}(\omega)| d\omega}{\max_{\omega} (|F_{ij}(\omega)|)}. \quad (4.40)$$

Enligt (4.39) ser vi att i fallet utan dopplerpolarimetrisk koppling kommer σ_{ij} vara samma för alla i och j , och lika med

$$\sigma_{ij} = \sigma = 0.5 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(\omega)| d\omega}{\max_{\omega} (|\eta(\omega)|)}, \quad i, j = 1..3. \quad (4.41)$$

Detta är det nödvändiga villkoret för att det inte finns någon koppling mellan doppler- och polarisationsegenskaper. Om spektralbredden för de olika matriselementen i kovariansmatrisen $\mathbf{C}(\tau)$ är olika är egenskaperna relaterade till varandra. Från de två sista relationerna kan vi definiera en grad av koppling, W_{σ} , för ett radarmål

$$W_{\sigma} = (\max_{i,j} \sigma_{ij} - \min_{i,j} \sigma_{ij}) / (\max_{i,j} \sigma_{ij} + \min_{i,j} \sigma_{ij}). \quad (4.42)$$

Denna storhet antar värden mellan 0 och 1. Värdet noll indikerar ingen koppling, medan $W_{\sigma}=1$ motsvarar fallet där doppler- och polarisationsegenskaperna har en ett-till-ett relation.

Moiseev (2002) använde sig av informationen rörande spektralbredd och kopplingsgrad vid analys av mätningar vid 3.3 GHz av nederbörd i atmosfären, av mark (ett parkområde) och av en motorväg med förekommande fordon. Han fann bl.a. att informationen gav möjlighet att bestämma mikrofysiska egenskaper hos nederbörd. Han fann också i markmålsfallet att ett sammansatt mål som består av flera spridningscentra med olika doppler- och polarisationsegenskaper har ett ganska högt W_{σ} -värde.

För se-igenom-vägg-tillämpningen bedöms parametern inte ha samma användbarhet som i Moiseevs fall, eftersom man normalt inte kan vänta sig samma förekomst av olika rörliga måltyper i mätscenariot.

4.3.2.8. Undertryckning av bakgrundsklotter med korrelationsanalys

Man kan definiera olika korrelationskoefficienter i spektralområden mellan återspridda vågkomponenter för olika kombinationer utsänd och mottagen polarisation, se Appendix A.4.5.3. Exempelvis för en individuell dopplercell, k , kan man definiera en spektral korskorrelationskoefficient

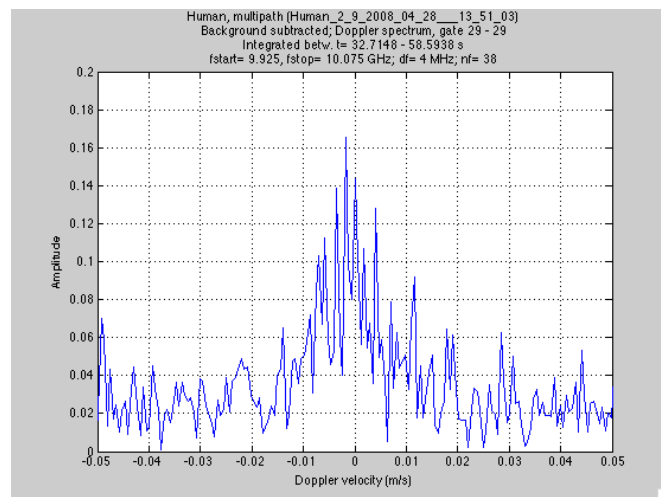
$$\rho_{HV}^k = \frac{F_{13}(\omega_k)}{\sqrt{\sum_k F_{11}(\omega_k) \sum_k F_{33}(\omega_k)}}. \quad (4.43)$$

Koefficienten ρ_{HV}^k representerar korrelationen mellan de två linjära, ortogonala likapolariserade fallen, d.v.s. korrelationen mellan HH (sänd och mottagen horisontell) och VV (sänd och mottagen vertikal) för dopplercell k . Denna koefficient, tillsammans med motsvarande koefficienter för andra polarisationskombinationer, skulle kunna vara användbar för diskriminering mellan ett mål med liten dopplerförskjutning och stationärt

bakgrundsklotter, och för undertryckning av det senare. Inom radarmeteorologi har bl.a. en grupp vid Delft University i Holland (Moisseev m.fl., 2000) utnyttjat koefficienten ρ_{HV}^k för undertryckning av markklotter relativt nederbörd i atmosfären.

Det gäller därvid att välja lämplig dopplerupplösning $\Delta\omega$, eller observationstid, T . [Sambandet mellan dessa är $\Delta\omega/(2\pi) \approx 1/T$; Kingsley och Quegan, 1992]. Om observationstiden är liten innehåller dopplerupplösningsscellen hela dopplerspektrum för målet. Å andra sidan kommer vid en mycket lång observationstid cellbredden att bli mycket smal, och dopplercellerna representerar då en närmast monokromatisk våg. För att få en hög kontrast mellan måleko och bakgrundsklotter i korskorrelationskoefficienten bör dopplerupplösningen vara tillräckligt bred för att innehålla hela spektrum hos bakgrunden, men tillräckligt fin för att ge en god separation mellan mål- och bakgrundsspektrum.

Figur 4.10 visar ett fall i en närliggande tillämpning, se runt hörn med radar (Sume m.fl., 2008; Sume m.fl., 2009). Mätningen gjordes med endast en polarisation, nämligen horisontell i både sändning och mottagning (HH). Figuren visar ett dopplerspektrum för HH-amplituden (kommande FOI-publikation) av en sittande människa utförande andningsrörelser bakom ett hörn, bildat av betongväggar. Man har en otvetydig detektion av rörelsen i spektrum centrerat kring hastigheten noll. För att i möjligaste mån framhäva målspektrum genom att undertrycka den stationära bakgrunden skulle motsvarande kurvor för korrelationskoefficienter, t.ex. ρ_{HV}^k , beräknad från en fullpolarimetrisk mätning, förhoppningsvis uppvisa en kurva över en korrelation mellan en viss kombination av polarisationer, som ger bästa diskriminering av bakgrunden. Den fysikaliska motiveringen till en sådan möjlighet är att spridningsstrukturen hos en människokropp skiljer sig från den hos en mer geometriskt rätlinjig bakgrund, t.ex. i ett rumsscenario enligt Figur 2.1.

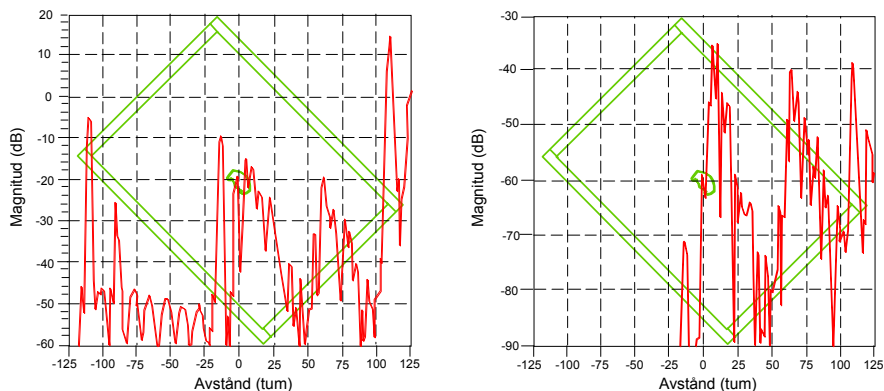


Figur 4.10. Dopplerspektrum (amplitud som funktion av dopplerhastighet) av människa utförande andningsrörelser, sittande bakom ett hörn, utan direktsikt till radarn. Polarisationen är horisontell vid sändning och mottagning. Andningsrörelsen syns som en förhöjning av amplituden mellan ca -0.015 och +0.015 m/s. Vid signalbehandlingen har subtraherats en "bakgrundsregistrering", från ett tidsavsnitt då personen höll andan, vilket reducerar amplituden närmast noll, som innehåller retur från stationär bakgrund. (Från kommande FOI-publikation).

4.3.3. Simuleringar av människa i rum

Omfattande simuleringar av signaturen hos människa, dold bakom vägg, har gjorts av en grupp vid Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland, USA och publicerats i flera tekniska rapporter, tidskrifts- och konferenspublikationer (bl.a. Dogaru, Nguyen och Le, 2007; Dogaru och Le, 2008; Dogaru och Le, 2009; Le m.fl., 2009; Dogaru, Le och Kirose, 2009). Beräkningarna har gjorts bl.a. med FDTD-metod (*Finite-Difference Time-Domain*) och med ett *ray-tracing*-program (Xpatch). Modellerna av människa omfattar en dielektrisk beskrivning av respektive individs vävnad indelad i 1, 2 och 3 mm stora kubiska celler. Både statiska poser och dynamiska förlopp (gång) har presenterats. De undersökta frekvenserna ligger mellan ca 1 GHz och 10 GHz, med fokus på de lägre frekvenserna inom detta band.

Man har studerat hur målarean varierar bl.a. med avseende på kroppstyp, position, aspektvinkel, frekvens och polarisation (HH, VV, HV, VH). Data har presenterats i kurvform, SAR-bilder och spektrogram (tid-frekvens-diagram). Data avses bilda underlag för detaljerade systemstudier. Figur 4.11 visar ett stickprov i form av avståndsprofiler för ett rum med tegelväggar, med en stationär människa stående mitt i rummet. De två delfigurerna gäller VV resp. VH polarisation. De visar att för VV polarisation är returen från personen ca 15-25 dB under de starkaste topparna från väggarna, medan situationen är omvänd i korspolarisation (VH), med väggreturerna nu mindre än från människan. Dock noterar man att nivån i VH är ca 20 dB lägre än i VV, vilket kan ge en besvärande låg signal/brus-kvot.



Figur 4.11. En person mitt i ett rum med tegelväggar. En radar utanför rummet belyser detta från vänster i figurerna. De röda kurvorna är avståndsprofiler (amplitud som funktion av avstånd). Vänstra figuren visar VV polarisation, den högra visar VH. Korspolarisationsfallet (VH) uppvisar en retur från personen som är starkare än returerna från väggreflexer i rummet, medan det omvända är fallet med VV polarisation. (Efter Dogaru och Le, 2008).

5. Sammanfattning

5.1. Inledning

Rapporten har i huvudsak fokuserat på två viktiga moment i se-igenom-tillämpningen av radar i urban miljö, dels radarvågens interaktion med väggar samt dels med mål- och bakgrundsobjekt, med fokus på polarisationsegenskaper. Den första behandlingen tar huvudsakligen sikte på det fysikaliska förloppet, medan den andra till stor del beskriver hur man med signalbehandling av en fullpolarimetriskt uppmätt retursignal, eventuellt i kombination med dopplerprocessering, skall uppnå optimala prestanda i fråga om att framhäva signaler från målobjekt relativt konkurrerande bakgrundsreturer. Framställningen utgör en översikt av existerande teori och av dess verifiering medelst simuleringar och experiment.

5.2. Vägginteraktion

Vägginteraktionen har behandlats med teori för infall från godtycklig riktning mot plan skiljeyta mellan två medier, den s.k. fresnelska teorin i en generaliserad form, som hanterar de inhomogena plana vågor som kan uppträda i dielektriska väggmaterial med förluster. Framtagningen av formelunderlaget i denna teori har getts en utförlig beskrivning i rapporten. Två speciella effekter har beskrivits, där den ena - uppkomsten av en longitudinell fältkomponent i ett dielektriskt väggmaterial med förluster - har försumbara praktiska konsekvenser med förekommande väggmaterial. Den andra är den s.k. brewstereffekten, som yttrar sig som ett minimum hos reflektionskoefficienten vid en viss infallsvinkel och ett motsvarande maximum hos transmissionen in i väggen, för en plan våg med fältstyrkan parallell med infallsplanet. Beräkningar har gjorts för ett exempel i form av en enskigts betongvägg där tvåvägstransmissionen räknat i effekt genom väggen vid brewstervinkeln är ca 40% högre än vid vinkelrätt infall. Brewstervinkeln inträffar i detta fall ca 68° från normalriktningen. Denna sidoinriktning av radarloben kan vara oacceptabelt stor med tanke på täckning av målområdet bakom väggen, och kan kräva något avsökningsförfarande av SAR-typ med bibehållen infallsvinkel mot väggen. Vid en handburen utrustning bedöms detta vara en avsevärd nackdel handhavandemässigt.

Ytterligare en central väggpåverkan har illustrerats, nämligen hur en godtycklig polarisation hos en snett infallande våg transformeras av väggpåverkan och returspridning i något målobjekt bakom väggen. Väggen har därvid antagits bestå av planparallella homogena skikt. Resultatet är att både formen och lutningen hos polarisationsellipsen kan ändras helt från utsändning till mottagning, vilket innebär att mottagarantennen måste kunna ta mot i två ortogonala kanaler, t.ex. horisontell och vertikal, om man inte vill riskera att en stor del av retureffekten kan gå förlorad.

Efter dessa studier av vägginverkan vid godtyckliga infallsvinklar behandlas i rapporten endast vinkelrät belysning mot väggen. En vägg utan variationer i tvärsled ger då samma dämpning och fasändring för alla komponenter hos den elektriska fältstyrkan, oberoende av deras orientering. Resultatet blir att en godtycklig elliptisk polarisation inte ändras av väggpåverkan, eftersom den kan ses som sammansatt av två ortogonalt orienterade komponenter. I det följande kommer de olika metoderna att beskrivas utan explicit nämnande av väggpåverkan.

5.3. Mål- och bakgrundsinteraktion

5.3.1. Fixa polarisationsval

Beträffande interaktionen med mål- och bakgrundsobjekt är scheman för ökning av kontrasten mellan dessa, med fixa polarisationsval vid insamling och signalbehandling, enklast att implementera och bör prövas experimentellt. Två sådana fasta scheman nämns:

1) Användning av "korspolarisation" vid sändning och mottagning, d.v.s. att sända i någon polarisation och ta mot i den ortogonala. Simuleringar har visat att man kan göra

vinster rörande returer från mänskliga målobjekt relativt returer från t.ex. hörn i ett rum. Signalnivåerna kan emellertid bli så låga att känslighetsproblem kan uppstå.

2) Användning av polarisationsdifferens. Systemet antas kunna mäta (sända och ta mot) i horisontell polarisation (HH) och i vertikal (VV). Man bildar polarisations-differensen mellan dessa, $PDI=HH-VV$, som är noll för polarisationsokänsliga objekt, t.ex. en sfär eller en vägg vid vinkelrätt infall, men skild från noll för mer osymmetriska objekt, t.ex. ett cylindriskt föremål. PDI kan därmed användas i diskrimineringssyfte, t.ex. att subtrahera bort väggeffekter. I vissa avseenden utgör PDI tillsammans med summan $HH+VV$ en optimal kombination av linjärpolariserade kanaler för estimering av linjärpolariserade parametrar resp. retureffekt från ett objekt.

5.3.2. Metoder för optimering av returer och kontraster

Bättre prestanda kan förväntas med optimerade polarisationsval, som tar hänsyn till de aktuella inmätta polarimetriska signaturerna hos måtsenen. För optimeringen är det inte nödvändigt att konstruera en antenn med en polarisation som väljs så att den mottagna effekten från ett mål maximeras. Samma information kan syntetiseras från den som samlas in (koherent) genom användning av två ortogonalt polariserade antenner. Syntetiseringen kräver emellertid mer avancerad signalbehandling än vid ett fast schema.

Det enklaste fallet för optimering är den monostatiska returen från en ensam, stationär spridare utan konkurrerande bakgrund. Maximal retur från denna erhålles då antennpolarisationen väljs som lösningen till en s.k. *con*-egenvärdesekvation för målets spridningsmatris. Med konkurrerande (stationär) bakgrund övergår problemet till en maximering av kvoten mellan mottagen målsignal och mottagen klotteresignal, där vardera storheten (spänning i kvadrat) består av en kvadrerad produkt mellan tre matris/vektorstorheter, som beskriver sändarantennens polarisation, spridningen i respektive objekt, samt mottagarantennens polarisation. Maximum inträffar då nämnaren (d.v.s. klottereffekten) är noll, vilket inträffar då antennpolarisationen väljs som lösningen till en annan egenvärdesliknande ekvation, den för s.k. COPOL-noll-polarisation.

För tidsvariabla mål genomförs liknande optimeringar av kvoter mellan mål- och klottereffekter, som består av produkter mellan antennpolarisationer och olika spridningsbeskrivande storheter (matriser) för mål resp. klotter, allt nu uttryckt med effektstorheter (stokesvektor, kovariansmatris).

För rörliga mål kan en gemensam doppler- och polarisationssignalbehandling, *dopplerpolarimetri*, ge prestandavinster. De beskrivna optimeringsmetoderna kan göras separat för varje doppler-cell i spektral-domänen. I rapporten beskrivs hur spektral kovarians kan erhållas utgående från en naturlig generalisering av kovariansmatrisen i tidsdomänen, följd av en fouriertransformering.

En metodik för polarimetrisk måligenkänning är att dela upp målets spridnings- eller kovariansmatris, eller någon annan därmed ekvivalent matris, i delmatriser, som är förknippade med enskilda spridare med specifika spridningsegenskaper eller ensembler av sådana. En sådan uppdelning är kontrastskapande och är därför av intresse även i vår tillämpning. I rapporten (i Appendix A, avsnitt A.6) ges en kort översikt av aktuella metoder. Dessa kan delas in i spänningsbaserade, koherenta metoder baserade på uppdelning av spridningsmatrisen, samt effektbaserade, inkoherenta metoder, baserade på uppdelning av matriser av effekttyp. Vid tidsvariabla mål är den senare typen den bäst tillämpliga. Uppdelningen av kovariansmatrisen (3×3 -matris) sker i form av en s.k. spektraluppdelning, som baserar sig på egenvärdena och egenvektorerna till matrisen. Den ger en uppdelning i tre okorrelerade komponentmatriser. Av dessa kan man konstruera en enkel statistisk modell, bestående av utveckling av kovariansmatrisen i summan av tre oberoende mål, av vilka varje mål representerar en deterministisk spridningsmekanism, associerad med en enskild ekvivalent spridningsmatris. Egenvärdena kan kombineras till en enda skalär, målets *entropi*, som är ett mått på den polarimetriska "oordningen" hos spridaren, d.v.s. hur stor del av den återspridda effekten som är opolariserad. Entropin antar värden mellan 0 och 1.

5.3.3. Specifikt arbete 1: Adaptiv bildalstring baserad på polarisationsdifferens

Vid en genomgång av den rikhaltiga litteraturen om radarpolarimetri som numera finns (över 1300 referenser i en databas som byggts upp vid FOI under flera år) har i rapporten två internationella grupper verk valts ut, som på ett mer systematiskt sätt genom simuleringar

och mätningar sökt tillämpa några av de beskrivna teoretiska metoderna, och som bedömts vara värdefulla i se-igenom-tillämpningen. Av dessa är endast det ena arbetet specifikt inriktat mot att se genom vägg, med bildalstrande system, medan det andra omfattar experimentella undersökningar och teoretisk metodutveckling med inriktning mot dopplerpolarimetri, tillämpad bl.a. på radarmeteorologi och observation av fordon, men inte se-igenom-fallet. En relativt stor del av rapporten har ägnats åt beskrivning av dessa två arbeten.

Gruppen, som utfört det första arbetet vid universitet i Pennsylvania i USA, har sin bakgrund i optisk teknik, vilket delvis färgar metodiken, som är inspirerad från iakttagelser i biologin bl.a. hos insekter. Gruppen har visat hur man använder ovannämnda polarisationsdifferens vid optiskt bildalstring adaptivt med avseende på en aktuell scen, varefter man simulerat metodiken i se-igenom-tillämpningen med radar med gruppantenn. Proceduren tillgår så att man analyserar polarisationsstatistiken hos en bakgrundscen, utan målobjekt, med välkänd PCA (*Principal Component Analysis*)-teknik tillämpad på mätdata från två ortogonala polarisationskanaler. Med PCA bestämmer man adaptivt två optimala informationskanaler, som syntetiseras som linjärkombinationer med olika viktskoefficienter av de två ursprungliga ortogonala linjära polarisationskanalerna, som först transformerats till två kanaler med godtyckliga orienteringsvinklar (ψ_1, ψ_2) för den linjära polarisationen medelst enkel projektion. PCA-tekniken kräver kovariansmatrisen (2×2) för signalparet som utgörs av utsignalen från de två optimala informationskanalerna. Elementen i matrisen utgörs av medelvärden av ett antal stickprov av auto- och korsprodukterna mellan de båda signalerna. Stickproven realiserades genom att signalerna bildades av alla kombinationer av elementpar i den simulerade gruppantennen.

PCA-analysen av två uppmätta signaler ger två kanaler som i princip svarar mot en summa- resp. en skillnadskanal. PCA-analysen upprepas ett antal gånger, med nya, fixa värden på ψ_1, ψ_2 . Ett optimalt vinkelpar bestäms med halv-empirisk metodik, som ger en praktiskt optimal separation mellan mål och en specifik bakgrund. Därefter mäts målscenen upp, varefter man med de erhållna viktskoefficienterna och orienteringsvinklarna, som bestämts ur uppmätningen av bakgrundsscenen, syntetiserar två ”optimala” kanaler. Optimeringen medför att förändringar i scenen, t.ex. uppträdandet av ett målobjekt eller en målrörelse, blir mest framträdande för en observatör. Detta verifierades genom simulering av ett enkelt se genom-scenario, där ett mänskligt målobjekt modellerades av två cylindrar, en lodrät för bålen samt en rörlig cylinder för en arm, fäst vid den förra cylindern. Forskargruppen finner att metoden ger en ökning av förmågan att detektera förändringar jämfört med icke-adaptiv teknik. Man noterar att metoden innebär ett sätt att detektera förändringar i form av rörelser, utan att använda sig av dopplereffekten, och således även rörelser vinkelräta mot siktlinjen till radarn.

Den beskrivna metoden avser monokromatiska vågor. Gruppen har även formulerat den för användning med transienta, bredbandiga signaler, i tidsplanet, där varje tidssampel (avståndslucka) behandlas på beskrivet sätt. Denna formulering har de tillämpat på ett simulerat scenario av en orörlig människa bakom en vägg av slaggbetong, med håligheter. Scenbelysningen åstadkommes med en gaussisk lob och det spridda fältet samlas in i fjärrfältet. Man finner att den ena principalkomponentsignalen lindrar inverkan av väggen i hög utsträckning och ger en resulterande signal som huvudsakligen skapas av det mänskliga målobjektet. En fullständig simulering av samma scen men med användning av en bildalstrande gruppantennradar har de inte gjort, däremot en simulering med en linjär endimensionell gruppantenn, med registrering av de lika och korspolariserade komponenterna och en konventionell lobformning. De fann att i bilden i den korspolariserade kanalen en stor del av väggeffekterna hade avlägsnats, i motsats till fallet i den likapolariserade kanalen. De drar slutsatsen att det korspolariserade spridda fältet spelar en signifikant roll vid alstrandet av den kanal med bäst detektionsförmåga i den adaptiva processen, som beskrevs ovan.

5.3.4. Specifikt arbete 2: Dopplerpolarimetri

Den andra gruppen, vid Tekniska Universitetet i Delft, utvecklar först lämpligt sätt att teoretiskt behandla dopplerpolarimetri med metodik för kontrastoptimering med en generaliserad kovariansmatris. De tillämpar sedan detta på mätdata från radarmeteorologi och observation av motorvägsfordon. I den första tillämpningen fick man signifikant prestandaförbättring rörande klotterundertryckning av stabilt klotter, som enbart

dopplerbaserade metoder inte hanterat. I den andra tillämpningen erbjuder den införda kovariansmatrisen en måluppdelning i individuella komponenter, och möjlighet att beräkna målentropi, med ökad förmåga till korrekt målidentifikation med mer avancerad signalbehandling.

6. Fortsatt arbete

Som framgått av denna rapport har mycket lite av systematiska studier gjorts internationellt rörande användning av radarpolarimetri i se-igenom-tillämpningen. Speciellt saknas experimentell verifiering av föreslagen metodik i något se-igenom-scenario med mänskliga mål. Det är viktigt att få sådant underlag, då det kan vara svårt att i simuleringar fånga in korrekt de relativt subtila skillnaderna i polarisationsegenskaper hos mål och miljö, som man kan förvänta sig.

En värdering av polarisationens potential i se-igenom-tillämpningen blir något spekulativ på grund av nämnda brist på experimentellt underlag i verkliga scenarion. En allmän synpunkt är att man knappast kan avstå från den ytterligare informationskälla för t.ex. målklassificering, som polarisationen utgör i denna komplicerade tillämpning. Man kan härvid peka på t.ex. att Nato-gruppen SET-155, RTG-085 i sitt pågående arbete (2009-2012) studerar polarisationen som en intressant möjlighet för ökad målinformation.

Rekommendationen som följer av nämnda konstateranden är att komplettera Lilla Gåras mätutrustning, alternativt att undersöka möjligheter att utnyttja FOI:s Arkenutrustning, för fullpolarimetriska korthållsmätningar i se-igenom-tillämpning. Mätmetodiken kräver elektronisk omkoppling mellan två ortogonala sändpolarisationer från puls-till-puls, med två parallella mottagarkanaler med ortogonala polarisationer, koherent, d.v.s. med faskontroll. Detta skulle innebära en fördubbling av nuvarande kanaluppsättning för Lilla Gåra-systemet. Mätmetodiken har prövats i enkelpolarisationsutförande på Lilla Gåra, i FOI:s franska samarbete (se-igenom trädörr), samt i se runt hörn-mätningar med betongväggar. För kalibrering av polarisationskanalerna kan tidigare mätmetodik från mm-vågsmätningar, med speciella kalibreringsreflektorer, direkt övertas här.

Efter en anskaffning av lämplig mätutrustning bör arbetet inriktas mot att bygga upp en polarimetrisk mät- och analysförmåga bl.a. av mänskliga mål. Främst krävs att mäta upp en kalibrerad spridningsmatris och därur bilda andra målbeskrivande matriser såsom kovariansmatrisen. Dessa skall man kunna hantera i olika sammanhang, t.ex. för att testa olika föreslagna sätt för ökning av mål/bakgrundskontrast, måluppsdelning etc. för att i ett senare skede vidareutveckla signalbehandlingsrutiner.

Appendix A. Polarisationssteori

A.1. Inledning

Detta appendix utgör en översikt av radarpolarimetri som ämnesgren. Innehållet utgörs till stor del av öppet material från en tidigare FOA-rapport (RH--98-00366-314 av A. Sume). Detta material har bedömts fortfarande vara tillräckligt relevant för att motivera en publicering i denna öppna rapport. Det har här kompletterats med nyare delar som ansetts vara av vikt för den avsedda tillämpningen. Några moderna referenser som kan rekommenderas är böckerna av Mott (2007), Lee och Pottier (2009). Här bör också nämnas Huynens avhandling (Huynen, 1970, 1987), en tidigare nyckelreferens. Alldeles nyligen har publicerats en bok av Cloude (2010), som ger en djupare insikt i polarisationsteorin, med en generaliserad, modern teoretisk bas, som bl.a. inkluderar det bistatiska fallet.

I föreliggande appendix består avsnitt 3-5 av en genomgång av de teoretiska verktyg som kommer till användning för beskrivning av polarisationsegenskaperna hos radarvågor och spridande objekt. I avsnitt 6 ges en översikt av några enkla radarreflektors polarisationsegenskaper och av olika metoder för att bestämma den dominerande spridningsmekanismen hos mer komplexa, tidsvariabla mål (målpuppdelningsteorier).

A.2. Ämnesöversikt

Polarimetri handlar om vektornaturen hos en elektromagnetisk våg. Traditionellt har polarisationen i radarsammanhang behandlats i stort sett som en skalär, då man använt sig av enkanalig sändning och mottagning. Genom att lämna denna hantering till förmån för en vektoriell, är det uppenbart att man bör kunna utnyttja den extra informationsmängden för att förbättra ett radarsystems prestanda.

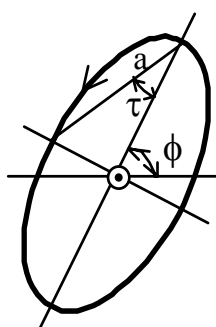
Maxwells ekvationer ger i och för sig en fullständig vektorbeskrivning av spridningen av en radarvåg mot ett mål, men det är ofta en alltför grundläggande nivå för systembetraktelser. Man vill ha ett mer globalt betraktelsesätt, gärna en beskrivning av polarisationsegenskaperna hos fält och radarmål med ett begränsat antal parametrar. Bl.a. därför brukar man inom den forskningsgren, som fokuserar sig på teorin för radarpolarimetri, dela upp området i **elektromagnetisk teori**, som är tillämpningen av de Maxwellska ekvationerna, och **polarisationsalgebra**. Inom det senare ämnesområdet bryr man sig inte om den detaljerade fysikaliska analysen av själva spridningsförloppet, utan ser detta som en transformation av den infallande vågens polarisation. Angreppssättet är **fenomenologiskt**, i stort sett oberoende av någon modell för spridningen. Man ser vilka generella slutsatser som kan dras för *varje* radarmål, bl.a. genom att använda den linjära algebras verktyg. Det beskrivningssätt som utkristalliserar sig är bl.a. våglängdsberoende: man kan använda samma parametrar i t.ex. mm-vågsområdet och i HF-området. Varje individuell parameter blir däremot i allmänhet en funktion av våglängden.

Det vore ett misstag att betrakta den algebraiska beskrivningen som tom på fysikaliskt innehåll; den uttrycker snarare ett sökande efter hur man skall beskriva universella kännemärken hos mål. Beskrivningen har karakteristika, som kan föras tillbaka till inneboende egenskaper hos det elektromagnetiska fältet eller fotonen (Sume och Eriksson, 1996). Utvecklandet av detta synsätt går bl.a. ut på att man frågar efter symmetrier i problemställningen genom att ställa upp egenvärdesliknande problem. Andra nyckelord är dimension och linearitet. Angreppssättet liknar procedurer som följs i andra grenar i modern fysik, som använder matris- eller operatorformalism. Det är inte förvånande att man tillgriper grupp teori i mer avancerade framställningar. Den matematiska formalismen ger en systematisk struktur hos de teoretiska verktygen, och man får en överblick av sambanden mellan dem, vilka inte framstår klart vid ett mer *ad hoc*- artat angreppssätt. Det visar sig dessutom att flera begrepp har åskådlig fysikalisk tolkning, t.ex. ett måls karakteristiska polarisationer. De algebraiska verktygen lämnar också en ram för mer modellbaserade studier. Den följande framställningen ger en antydning om detta.

A.3. Polarisationen hos en våg och dess transformation

A.3.1. Vågpolarisering

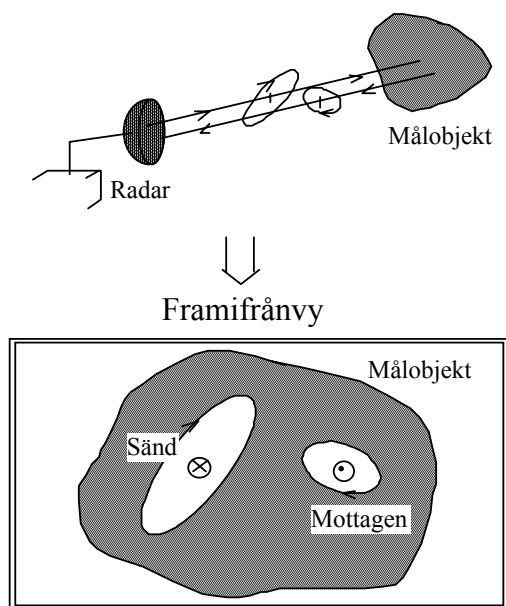
I ett isotropt och förlustfritt medium är en radarvåg transversell, med de elektriska och magnetiska fältstyrkorna vinkelräta mot varandra och mot utbredningsriktningen. Polarisationen definieras av den elektriska fältstyrkans riktning, som alltså ligger i ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen, om den observeras i en fix punkt i rummet. Polarisationsbeskrivningen blir tvådimensionell, om man underförstår att den sker i detta plan. För en sinusvåg av en viss vinkelfrekvens ω finner man att kurvan som fältvektorspetsen beskriver som funktion av tiden i en viss punkt i rummet, är en ellips (Azzam och Bashara, 1987, s. 2-6), **polarisationsellipsen**, som är en geometrisk, koordinatfri representation av vågens polarisation. Ellipsen kan beskrivas parametriskt med tre parametrar, som utgör mått på ellipsens storlek, lutning och excentricitet, se Figur A.1. Vågen sägs vara **elliptiskt polariserad**. Linjära och cirkulära polarisationer utgör specialfall av elliptisk polarisation.



Figur A.1. Polarisationsellips i ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen (vinkelrätt ut från papperet). Figuren beskriver "höger"-rotationsriktning hos spetsen hos fältstyrkevektorn enligt IEEE definition, d.v.s. som man drar åt en högergängad skruv sett i utbredningsriktningen. Ellipsens storlek beskrivs av sträckan a , dess form av vinkeln τ samt dess orientering av vinkeln ϕ . Rotationsriktningen beskrivs genom att ge τ ett tecken, där minus- resp. plus-tecken anger "höger"- resp "vänster"-rotationsriktning.

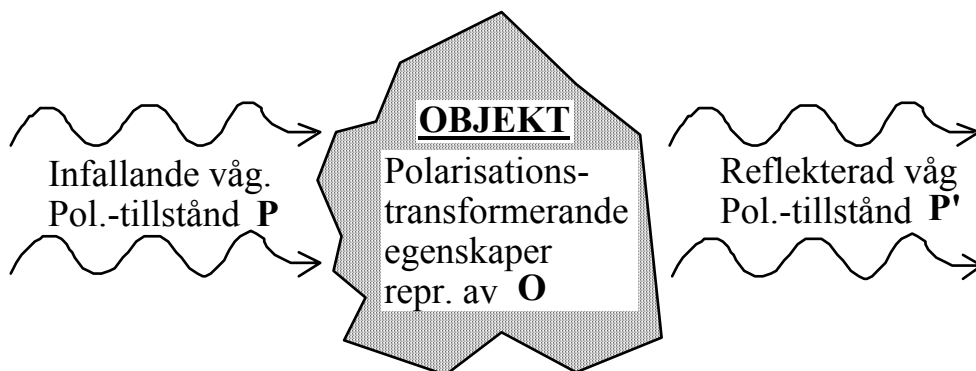
A.3.2. Målspridning, en polarisationstransformation

Om en radarvåg träffar ett objekt, sprids den, varvid den spridda vågens (elliptiska) polarisation i allmänhet skiljer sig från den infallande, se Figur A.2.



Figur A.2. Ett radarmål transformerar allmänt den infallande vågens polarisation till en annan polarisation hos den spridda vågen.

För en översiktlig matematisk beskrivning inför vi beteckningar enligt Figur A.3.



Figur A.3. Schematiskt spridningsförlopp, då ett radarmål träffas av en infallande våg.

En plan våg med vinkelfrekvensen ω faller in mot ett objekt. Vågen har i det allmänna fallet ett elliptiskt polarisationstillstånd, som kan representeras symboliskt av $\mathbf{P}$. Målobjektet transformerar tillståndet; resultatet av transformationen kan symboliskt skrivas som $\mathbf{OP}$. I matematikens språk: operatoren $\mathbf{O}$ opererar på $\mathbf{P}$. Den reflekterade vågens polarisationstillstånd ges alltså av operatorekvationen

$$\mathbf{P}' = \mathbf{OP}, \quad (\text{A.3.1})$$

Operatoren $\mathbf{O}$ är frekvensberoende, men framför allt aspektvinkelberoende för ett allmänt mål. Vi skall redogöra för olika metoder för beskrivning av vågpolarisation, $\mathbf{P}$, vilka ger olika storheter $\mathbf{O}$ för beskrivning av målspridningen. Beskrivningen har här delats in längs två huvudlinjer. Längs den ena utgår man från en beskrivning av vågpolarisation i *fältstyrkemått*, med *absoluta* faser. Man talar om en **koherent** beskrivning. Målspridningen representeras av en matris, **spridningsmatrisen**, som bibehåller informationen om absolut fas, som bl.a. beror av avståndet från målet. Längs den andra linjen utgår man från en polarisationsbeskrivning av vågen i *effekt*mått, som består av kvadratiska produkter mellan fältstyrkekomponenter, där

enbart relativ fasinformation bibehålls, en **inkoherent** beskrivning². Detta sätt är lämpat för fall där vågens polarisation fluktuerar, speciellt stokastiskt. En vanlig effektbeskrivning är via den s.k. **koherensmatrisen**, vars element kan uttryckas med hjälp av de s.k. **Stokes-parametrarna**. Målspridningen representeras av **Mueller-matrisen** eller **Kennaugh-matrisen**.

Den använda uppdelningen bör inte uppfattas som absolut; den används här för att få en strukturering av framställningen.

A.4. Koherent vågbeskrivning (fältstyrka)

A.4.1. Vågen: Jones vektor

Vid den första metoden att beskriva spridningsförloppet representeras **P** av den elektriska *fältstyrkans* komponenter i ett koordinatsystem i ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen. Vi inför två ortogonala koordinataxlar $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ i detta plan, med ena axeln lämpligen horisontell. I detta system kan fältkomponenterna för en våg, som utbreder sig i $\hat{x}_3$ -riktningen med en vågvektor $k\hat{x}_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{x}_3$, skrivas

$$e_1 = E_{10} \cos(\omega t - kx_3 + \alpha_1), \quad (\text{A.4.1a})$$

$$e_2 = E_{20} \cos(\omega t - kx_3 + \alpha_2). \quad (\text{A.4.1b})$$

Amplitud- och fasfaktorerna $E_{10}, E_{20}, \alpha_1, \alpha_2$ är (reella) konstanter. Vågpolarisationserna (vid $x_3 = 0$) representeras av den tvådimensionella komplexa vektorn (en **spinor**)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{10} e^{i\alpha_1} \\ E_{20} e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.2})$$

Som vanligt vid komplex representation av harmoniska förlopp tar man inte med fasfaktorn ωt . Den komplexa vektorn **E** med de komplexa komponenterna E_1 och E_2 kallas **Jones' vektor** och är en koherent beskrivning av en våg. Denna är **fullständigt polariserad** i det fallet vi betraktat med tidskonstanta E_1 och E_2 .

A.4.2. Målet: spridningsmatrisen

Om man gör antagandet att den infallande plana vågen sprids linjärt av målet, kan man skriva komponenterna hos den spridda vågen som en linjärkombination av den infallande vågens komponenter enligt

$$E'_1 = s_{11}E_1 + s_{12}E_2, \quad (\text{A.4.3a})$$

$$E'_2 = s_{21}E_1 + s_{22}E_2. \quad (\text{A.4.3b})$$

Här är E'_1, E'_2 och E_1, E_2 (de komplexa) vektorkomponenterna hos den reflekterade resp. infallande vågen i ett koordinatsystem som ligger vinkelrätt mot utbredningsriktningen enl. föregående avsnitt. De fyra komplexa talen $s_{11}, s_{12}, s_{22}, s_{21}$ beskriver spridningen. [Radarmålarean σ är proportionell mot kvadraten av respektive koefficients belopp, t.ex. $\sigma_{11} \propto |s_{11}|^2$].

Vi har alltså en matrisrelation

$$\mathbf{E}' = \mathbf{S}\mathbf{E}. \quad (\text{A.4.4})$$

Här är

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix}, \text{ och } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.5})$$

²Terminologin koherent/inkoherent är något olycklig, vilket kommer att framgå t.ex. i avsnitt A.4.5.1.

och polarisationsmatrisen (eller spridningsmatrisen) ges av

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.6})$$

Matriselementen i $\mathbf{S}$ hanterar absoluta fasrelationer; beskrivningen är **koherent**. Det krävs alltså 8 reella tal för att beskriva spridningen i målet. Beskrivningen är *fullständig* i den meningen att det inte ger någon ytterligare information att mäta matriselementen för någon annan polarisationskombination än 11,22,12,21, t.ex. någon cirkulär kombination. Dessa går att beräkna ur $s_{11}, s_{12}, s_{22}, s_{21}$.

Uppmätning av polarisationsmatrisens koefficienter kan göras enl. (A.4.3) genom att man mäter upp de båda fältkomponenterna E_1', E_2' i två ortogonala kanaler i radarmottagaren, med sändning omväxlande i de båda ortogonala polarisationerna, d.v.s. sändning med $E_1 \neq 0; E_2 = 0$ resp. sändning med $E_1 = 0; E_2 \neq 0$. I en pulssad radar kan mätningen göras i två på varandra följande pulser, förutsatt att mätgeometrin inte ändras under tiden.

Antalet parametrar kan reduceras: för det första gäller reciprocitet i de flesta monostatiska fall, vilket ger att spridningsmatrisen blir symmetrisk, d.v.s. $s_{12} = s_{21}$ (se Huynen, 1987; Cloude och Pottier, 1996). Vi kommer i det följande enbart studera **monostatiska** fall. Cloude (2010) ger en behandling av det bistatiska fallet. För det andra kan en gemensam fasfaktor brytas ut ur matrisen och i allmänhet utelämnas för beskrivningen. Därmed återstår 5 parametrar.

Att spridningsmatrisen som nämnts ger fullständig information om målets polarisationstransformerande egenskaper innebär inte att den är den *bästa* beskrivningen, t.ex. i fråga om att vara beräkningseffektiv eller genom att vara tydligt kopplad till målets geometri. Mycket av utvecklingen av polarimetrisk teori har handlat om att utgående från spridningsmatrisen hitta storheter med bättre egenskaper i dessa avseenden. Man kan urskilja två vägar.

Det ena sättet att på ett systematiskt sätt söka extrahera information ur spridningsmatrisen innebär att man beskriver spridningen genom några för målet **karaktäristiska polarisationer**, som har egenskapen att transformeras på något enkelt och åskådligt sätt av målet. Dessa polarisationer finner man matematiskt genom att lösa egenvärdesliknande problem för spridningsmatrisen. Man utnyttjar alltså vågstorheter för att beskriva målet. Använder man sig därvid av polarisationsellipsen, blir beskrivningen *geometrisk*, tillika koordinatsystemoberoende. Metoden lämpar sig bäst för stationära mål och monokromatisk strålning. Vi skall ge en översikt av metoden i följande avsnitt, som följer framställningen av Sume och Eriksson (1996).

Den andra vägen, som bättre lämpar sig vid beräkningar, innebär att man utvecklar spridningsmatrisen algebraiskt i komponentmatriser, enligt någon princip som ger dessa en önskvärd egenskap, t.ex. fysikalisk relevans. Medelst utvecklingskoefficienterna kan man bilda en (koherent) målvektor. Denna metod kommer att beskrivas mer i detalj i avsnitt A.4.5.

Det bör nämnas att utvecklingen av lämpliga beskrivningssätt i de olika fallen har gått relativt långsamt, med bl.a. svårigheter att få in antenn- och målbeskrivningarna i en korrekt algebraisk struktur. En del tidigare arbeten innehåller felaktigheter; det rekommenderas här att försöka använda den nyaste litteraturen, t.ex. böckerna av Mott (2007), Lee och Pottier (2009) samt Cloude (2010).

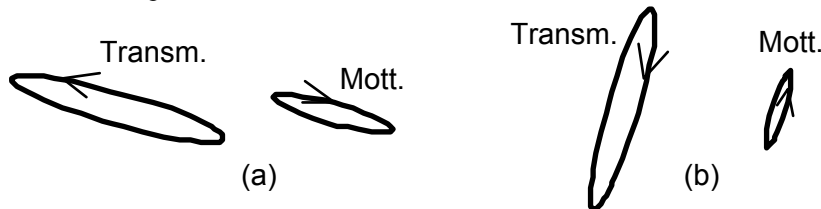
A.4.3. Målkaraktisering med optimala polarisationer och nollpolarisationer

Tanken bakom att eliminera koordinatsystemberoenden från en radarmålbeskrivning i det monostatiska fallet kan illustreras med ett exempel. Spridningsmatriselementen hos ett linjemål, som är orienterat vinkelrätt mot siktlinjen till en monostatisk radar och som bildar en vinkel ψ_a med horisontalriktningen är $s_{11} = \cos^2 \psi_a$, $s_{12} = \sin \psi_a \cos \psi_a = s_{21}$, $s_{22} = \sin^2 \psi_a$, där index 1 och 2 avser horisontell resp. vertikal komponent. En ändring av ψ_a kommer att ändra alla koefficienterna, utan att målets karaktär eller aspektvinkel som den betraktas från har ändrats. Horisontal/vertikal-basen är ett olämpligt val för ett godtyckligt ψ_a . På samma sätt kan s_{11} etc. för ett allmänt mål innehålla information, irrelevant för frågeställningar rörande målets natur. Man söker därvid en mer målegen

beskrivning, relaterad till egenskaper som struktur, form och storlek, förutom orientering. Dessutom bör en sådan beskrivning vara lätt att visualisera, en strävan som påkallar en geometrisk formulering, som kommer att beskrivas först. Detta kommer att göra det åtminstone heuristiskt uppenbart hur man bör gå vidare med en algebraisk behandling.

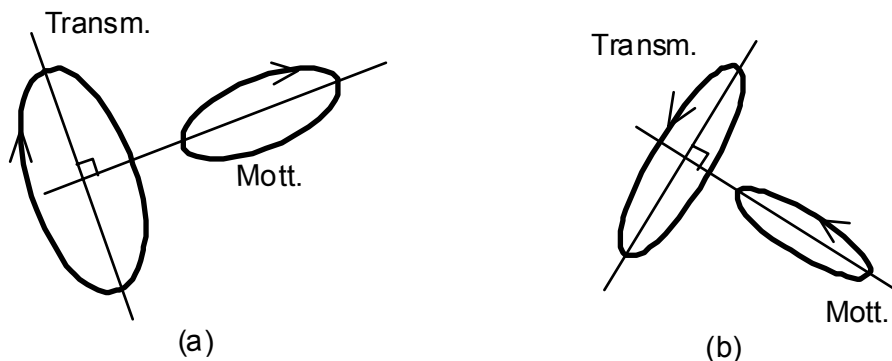
En metod som fyller kravet på visualisering är att använda polarisationsellipser för den infallande och spridda vågen för att beskriva målinteraktionen med fältet. Den infallande polarisationen väljs emellertid inte godtyckligt; ett lämpligt val bör ta fram kärnan hos målets transformationsegenskaper; dess karakteristiska polarisationer – de **optimala polarisationerna** och **nollpolarisationerna** – uppfyller detta kriterium.

Betrakta ett stationärt mål som belyses av en radar med samma antenn för sändning och för mottagning, vars polarisation kan ställas in till en godtycklig elliptisk polarisation. Det är intuitivt uppenbart att olika utsända (=mottagna) polarisationer allmänt kommer att ge olika effekt i mottagaren. Det är lika uppenbart att man kan finna ett maximum, vilket definierar den **maximala polarisationen**. Med denna polarisation är vågen är polarimetriskt anpassad till målet; detta kommer inte att ändra formen, orienteringen eller rotationsriktningen (sedd längs vågvektorn) hos den utsända vågens polarisationsellips, se Figur A.4 (a). Som kommer att framgå av den algebraiska beskrivningen har även den ortogonala polarisationen, med sin huvudaxel vinkelrät mot den maximala polarisationens och med motsatt rotationsriktning, egenskapen att dess ellips inte transformeras av målet, med avseende på form, orientering eller rotationsriktning, se Figur A.4 (b). Storleken hos returvågens polarisationsellips är emellertid mindre i ett generellt fall (radarmålarean är mindre). I det fallet finns det därför bara en maximal polarisation.



Figur A.4. För varje radarmål finns det två optimala, ömsesidigt ortogonala polarisationer, som inte transformeras av spridningen, som förklaras i texten. En av dessa, (a), ger den maximala returen. Beträkningsriktningen är rumsfix i figuren.

På samma sätt har varje radarmål (med fix aspektvinkel) två nollpolarisationer. Om målet belyses med något av dessa, ger radarreturen ingen effekt i mottagaren. Målet transformerar den infallande vågen till det ortogonala tillståndet, se Figur A.5 (b).



Figur A.5. Varje mål har två nollpolarisationer, som transformeras till det ortogonala tillståndet av spridningen i målet, och således ger nolleffekt vid mottagning. Nollpolarisationerna behöver inte vara ömsesidigt ortogonala.

Istället för matrisoefficienterna s_{11} etc. kan polarisationsellipserna hos de karakteristiska polarisationerna användas som den geometriska målbeskrivningen som eftersöktes. De två nollpolarisationerna och den maximala polarisationen definieras av sina orienteringsvinklar, ϕ , och ellipticiteter, representerade av τ . Vi betecknar dessa med ψ och τ_m för den maximala polarisationen, för vilka vi också använder bokstaven m för avståndet a i Figur A.1. Detta är ett mått på fältstyrkan, proportionellt mot kvadratroten ur radarmålarean.

Vi har på så sätt sju storheter för målkaraktiseringen, vilket är en överbestämning; endast fem behövs som nämnts ovan. Maximala polarisationen och en nollpolarisation bestämmer entydigt målets spridningsegenskaper för den fixa aspektvinkeln.

A.4.3.1. Bestämning av de karakteristiska polarisationerna

Vi vill uttrycka bildrepresentationen i Figur A.4 med matematik: vi vill bestämma en polarisation, representerad av en komplex vektor $\mathbf{x}$, sådan att då vågen sprids av målet, vilket matematiskt uttrycks med multiplikation från vänster med transformationsmatrisen $\mathbf{S}$, dess polarisationsellips inte ändras med avseende på form, orientering eller rotationsriktning, vilket matematiskt är ekvivalent med multiplikation med en skalär λ , d.v.s.

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^* . \quad (\text{A.4.7})$$

Komplexbeslutningen uppträder som en konsekvens av valet av koordinatsystem, se Lüneburg (1995). Denna ekvation kallas i radarsamfundet en pseudo-egenvärdesekvation. I matematiken sägs den vara en *con-eigenvektor*-ekvation med *con*-egenvärde λ . Prefixet *con* hänser till på konjugatet i högerledet. Denna ekvation liknar, men är fundamentalt skild från den vanliga egenvektor-egenvärde-ekvationen. Dess lösning består i att finna en unitär (Arfken och Weber, 1995) transformation $\mathbf{U}$ sådan att den unitära kon-similaritetstransformationen $\mathbf{U}^T \mathbf{S} \mathbf{U}$ skapar en diagonalmatris (Lüneburg, 1995). (Symbolen T betecknar transponat). Teorin för optimala polarisationer i radarpolarimetri hänger på en fundamental sats enligt vilket $\mathbf{S}$ är unitärt *con*-diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk (Horn och Johnson, 1985, s. 245), vilket vi har antagit vara fallet.

Det existerar två linjärt oberoende, ortogonala och normaliserade *con*-egenvektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, med *con*-egenvärden λ_1, λ_2 som satisfierar ekvationen. De bildar kolumnerna hos den unitära matrisen $\mathbf{U}$, d.v.s. $\mathbf{U} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$.

Bestämningen av *con*-egenvektorer och *con*-egenvärden är relativt rättfram, se t.ex. Sume (1992). Om numreringen väljs så att $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ är $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{m}$ den maximala polarisationen; vi sätter också $|\lambda_1| \equiv m$. Vi inför en analog benämning för den andra egenvektorn, $\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{m}_\perp$. De två *con*-egenvärdena uppträder som diagonalelement i den *con*-diagonaliserade matrisen. Som ett sista steg uttrycker vi egenvärdena i termer av fyra reella parametrar på följande form

$$\lambda_1 = m \exp[2i(\nu + \rho)] , \quad (\text{A.4.8})$$

$$\lambda_2 = m \tan^2 \gamma \exp[-2i(\nu - \rho)] , \quad (\text{A.4.9})$$

varigenom vi infört de fyra parametrarna m, ρ, γ, ν . Här är m den maximala radarreturen, vars kvadrat är proportionell mot den maximala radarmålarean. Kvantiteten ρ , målets absoluta fas, bestäms delvis av avståndet till radarn, och utelämnas vanligen från målbeskrivningen. En uppfattning om målets "skip"-vinkel ν kan fås i kortvägsfallet (väglängden mycket mindre än måldimensionerna), där den är relaterad till hur många studsar (udda eller jämnt antal) som vågen genomgår vid målspridningen. Denna storhet kallas ibland "relativ fas", eftersom den antar denna roll i diagonalmatrisen. Kvantiteten γ , polariserbarhetsvinkeln, är ett mått på målets förmåga att polarisera slumpmässigt polariserad strålning.

Här kan nämnas att det faktum att varje radarmål har två optimala polarisationer, med transformationsegenskaperna enligt Figur A.4 beror på att a) problemet är tvådimensionellt, en egenskap hos det elektromagnetiska fältet eller fotonen, och b) på det faktum att spridningen antas vara linjär, en målegenskap, och slutligen c) på att spridningen är reciprok, en egenskap som är avhängig symmetri vid tidsreversering.

För en fullständig karakterisering behöver vi fem storheter, förutom den absoluta fasen ρ . De två återstående kan tas som orienteringen och ellipticiteten hos polarisationsellipsen för $\mathbf{m}$, se Figur A.1. Orienteringsvinkeln hos denna ellips betecknar vi med ψ medan vi låter ellipticiteten representeras av vinkeln τ i Figur A.1, som vi för polarisationsellipsen för $\mathbf{m}$ förser med ett index m . De fem kvantiteterna $m, \psi, \tau_m, \gamma, \nu$ utgör den sökta parameteruppsättningen som beskriver målets inherent spridningsegenskaper (m, τ_m, γ, ν) och dess inrättning i omgivningen (ψ). Parametrarna introducerades av Huynen (1970) efter originalidéer av Kennaugh (1952).

På liknande sätt beskrivs Figur A.5 av ekvationen för den **kopolära nollpolarisationen**

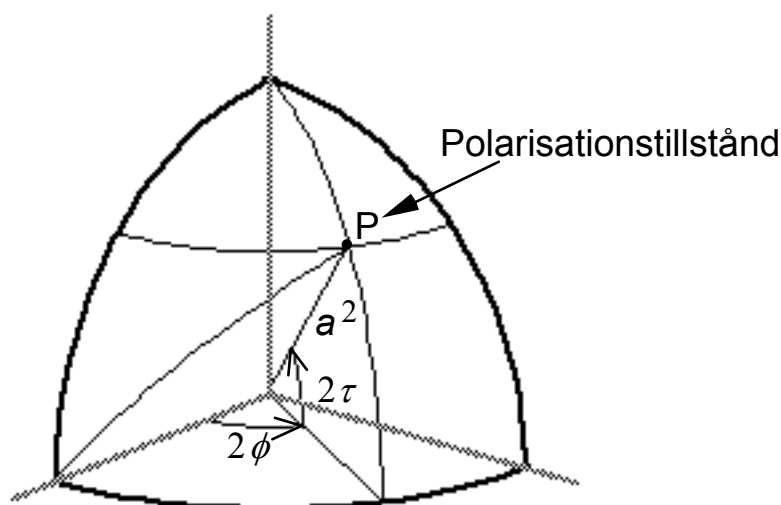
$$S\mathbf{y} = \mu \mathbf{y}_\perp^*, \quad (\text{A.4.10})$$

där $\mathbf{y}_\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{y}$ och μ är en skalär. Ekvationen har två lösningar, $\mathbf{y}_1$ och $\mathbf{y}_2$, vilkas komponenter är enkla uttryck i λ_1 och λ_2 (Lüneburg, 1995); de är ortogonala bara om $\lambda_1 = \lambda_2$. Vi inför benämningarna $\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{n}^+$ och $\mathbf{y}_2 \equiv \mathbf{n}^-$.

De beskrivna karakteristiska polarisationerna har en åskådlig representation på den s.k. Poincarésfären, vilket behandlas i följande avsnitt.

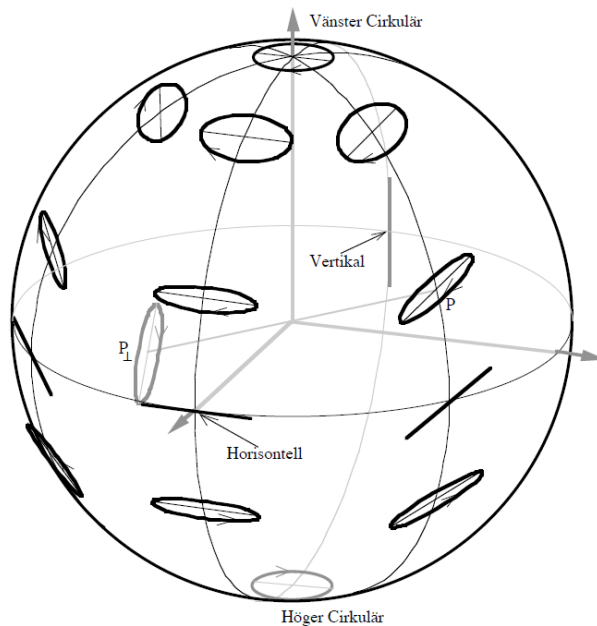
A.4.3.2. Polarisationsrepresentation med Poincarésfären

Ett åskådlig representation av vågpolarisation fås på den s.k. Poincarésfären. Man använder sig av vågens polarisationsellips parametrar a, ϕ, τ på följande sätt. Vinklarna 2ϕ och 2τ avsättes som longitud resp. latitud på en sfär med radien a^2 , se Figur A.6.



Figur A.6. En oktant av Poincarésfären. För en elliptiskt polariserad våg med parametrarna a, ϕ, τ (Figur A.1) avsätter man vinklarna 2ϕ och 2τ som longitud resp. latitud på en sfär med radien a^2 , och låter punkten P på sfären representera vågens polarisationstillstånd.

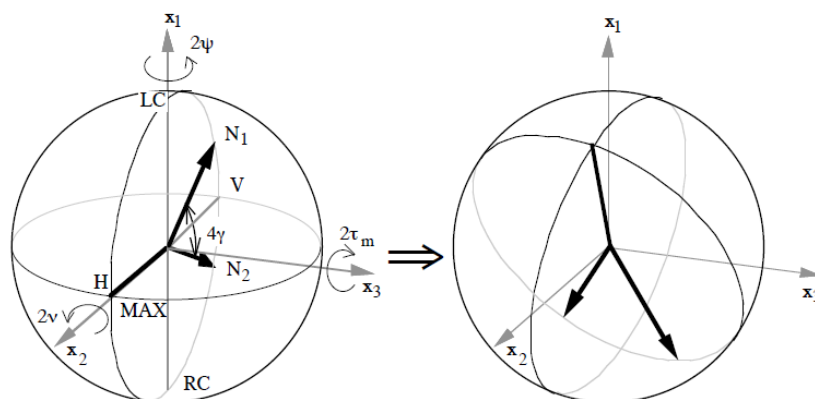
Med hjälp av Figur A.1 och A.6 finner man att på Poincarésfären representerar ekvatorn linjära polarisationer med olika lutningsvinklar, den övre halvan elliptiska vänsterpolarisationer med varierande ellipticitet och lutning hos ellipsen, och den undre halvsfären på samma sätt elliptiska högerpolarisationer. Ellipticiteten varierar med latituden och lutningen med longituden. Speciellt hamnar vänster-cirkulär polarisation på nordpolen, och höger-cirkulär på sydpolen. Detta är sammanfattat i Figur A.7, där i olika punkter på sfären, svarande mot olika elliptiska polarisationer, polarisationsellipsen är inritad. En väsentlig egenskap hos sfären är att diametralt motsatta punkter representerar ortogonala polarisationer.



Figur A.7. Poincarés sfär, där i olika punkter den tillhörande polarisationsellipsen är utritad. Ellipticiteten hos ellipserna varierar med latituden, lutningen ändras med longituden. Man noterar att diametrala punkter representerar ömsesidigt ortogonala polarisationer, vilket illustreras av punkterna Horisontell/Vertikal, Höger Cirkulär/Vänster Cirkulär samt av ett allmänt elliptiskt tillstånd P , där den diametralt liggande ellipsen $P_{\perp}$ är utritad.

A.4.3.3. Huynens polarisationsgaffel

Låt $\mathbf{P}(\mathbf{m})$, $\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\perp})$, $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$, $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$ vara tredimensionella *radii vectores* i Poincarérummet, svarande mot de fyra karakteristiska polarisationerna, som representeras av polarisationsvektorer (Jones-vektorer) $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_{\perp}$, $\mathbf{n}^{+}$, $\mathbf{n}^{-}$. Det visar sig att de tre vektorerna $\mathbf{P}(\mathbf{m})$, $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$ och $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$ [och $\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\perp})$] ligger i ett plan, och att $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$ och $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$ bildar en vinkel 4γ med varandra. Polarisationstillstånden på Poincarésfären svarande mot de fyra karakteristiska polarisationsvektorer $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_{\perp}$, $\mathbf{n}^{+}$, $\mathbf{n}^{-}$ ligger med andra ord längs en och samma storcirkel. De tre vektorerna $\mathbf{P}(\mathbf{m})$, $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$, $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$ bildar en likbent gaffel med ett handtag och två uddar, den s.k. polarisationsgaffeln. Gaffeln är symmetrisk: vektorn $\mathbf{P}(\mathbf{m}_{\perp})$ delar vinkeln mellan $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$ och $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$ i två lika delar.



Figur A.8. Ett sammansatt måls polarisationsgaffel i Poincaré-sfären (högra figuren) erhålles från ett utgångsläge (vänstra figuren) genom rotation av gaffeln med vinklarna 2ν , $2\tau_m$ och 2ψ kring x_2 , x_3 resp. x_1 -axlarna i markerade riktningar. Förkortningarna RC och LC står för "Right Circular" resp. "Left Circular", H och V för Horizontal resp. Vertical. Punkterna N_1 och N_2 svarar mot spetsarna hos vektorerna $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{+})$ resp. $\mathbf{P}(\mathbf{n}^{-})$.

En godtycklig polarisationsgaffel, svarande mot ett mål med någon godtycklig, fix aspektvinkel relativt radarn, kan erhållas från ett utgångsläge enligt den vänstra halvan av Figur A.8, som förutsätter att radien m^2 och vinkeln γ är kända. Man roterar sedan gaffeln som en stel kropp i ordning vinklarna 2ν , $2\tau_m$ och 2ψ kring de fixa x_2, x_3 resp. x_1 -axlarna i de riktningar som visas i figuren. Efter dessa tre rotationer representeras vektorn $\mathbf{P}(\mathbf{m})$ av skärningen mellan gaffelns ”skaft” och sfären, medan vektorena $\mathbf{P}(\mathbf{n}^+)$ och $\mathbf{P}(\mathbf{n}^-)$ ges av skärningarna mellan de två gaffelspetsarna och sfären

A.4.4. Korrelationer

I en del av beskrivningen av vågor och mål i de kommande avsnitten kan dessa uppvisa variationer i tid och rum, som lämpligen beskrivs statistiskt. Man studerar därvid allmänt korrelationer som existerar i två olika rumspunkter, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, och två olika tidpunkter, t_1, t_2 . Korrelationen mellan fältstyrkor definieras av en korrelationsmatris (Perina, 1985; Brosseau, 1998), även kallad ömsesidig koherensmatris

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (\text{A.4.11})$$

där $\langle \dots \rangle$ anger ensemblamedelvärde och där † anger transponering och komplexkonjugering (hermiteskonjugering). Produkten mellan fältstyrkorna i (A.4.11) är en **yttre produkt** (eller direkt produkt, se t.ex. Arfken och Weber, 1999, s. 170).

För ett i statistisk mening stationärt fält beror korrelationen enbart av tidsavståndet, τ , mellan t_1 och t_2 . Om fältet dessutom antas ergodiskt (Papoulis, 1991) kan ensemblamedelvärdet ersättas med ett tidsmedelvärde, varvid ett element av matrisen blir

$$C_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E_j(\mathbf{r}_1, t + \tau) E_k^*(\mathbf{r}_2, t) dt. \quad (\text{A.4.12})$$

I denna rapport är fokuseringen på tidskorrelationer, i en och samma rumspunkt, d.v.s. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

A.4.5. Vektorisering av spridningsmatrisen: målets koherens- och kovariansmatris

Ett framsteg i vår förståelse av hur man bäst skall kunna extrahera fysikalisk information från den klassiska spridningsmatrisen har varit att införa *systemvektorer* (Huynen, 1985; Cloude, 1986, 1992; Cloude och Pottier, 1996). Man utvecklar spridningsmatrisen i en viktad summa av en uppsättning 'bas'-matriser, Ψ , där dessa väljs med tanke på någon önskvärd egenskap, t.ex. att ge en enkel analys eller vara fysikaliskt relevanta. Koefficienterna i utvecklingen bildar komponenterna i systemvektorn, en komplex **målvektor**, $\mathbf{k}$, som är koherent, eftersom den bibehåller spridningsmatrisens absoluta fasinformation. Det finns motiv för att eliminera denna från målbeskrivningen (Huynen, 1995). Ett fysiskt mål är naturligtvis i sig oberoende av absolut fas. Det ändras inte om det förflyttas längs synlinjen till radarn, vilket den absoluta fasen gör. Detta har lett till att man bildat effektmått i form av kvadratiska produkter mellan $\mathbf{k}$ och $\mathbf{k}^\dagger$, vilket eliminerar den absoluta fasinformationen. De två kvadratiska former som kan bildas är $\mathbf{k}^\dagger \mathbf{k}$ och $\mathbf{k} \mathbf{k}^\dagger$. Den första är en skalär, skalärprodukten eller **inre produkten**, och används för normering. Den andra, den **yttre produkten**, är en matris som utgör en målbeskrivning i effektmått.

A.4.5.1. Vektorisering med Paulis spinmatriser: målets koherensmatris

Ett ofta använt bassystem är Pauli-matriserna (Arfken och Weber, 1995)³

³Det finns flera, alternativa definitioner av dessa, bl.a. med avseende på numreringen, se t.ex. Schmieder (1969) och Cloude (1986, s. 35). Här har valts Cloudes definition, med den s.k. traditionella numreringen, som ger den ordningsföljd hos Stokes parametrar som denne själv använde i sin originalformulering. Huynen (1987) använder en definition vanlig i radarsammanhang, Arfken och

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.13})$$

Dessa matriser bildar ett fullständigt system av 2x2-matriser, i vilket en godtycklig 2x2-matris kan utvecklas (se Wikipedia). De är ortogonala med avseende på **inre produkten**, som för två matriser **A** och **B** definieras som $\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\dagger)$, se t.ex. Horn och Johnson (1985, s. 332), men inte normerade:

$$\text{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu^\dagger = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A.4.14})$$

där Tr är förkortning för eng. "Trace", matrisens spår, summan av diagonalelementen. [Normen för en matris **A** är $\sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})} = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)}$.] Vid valet av Ψ_P , uppsättningen Paulibasmatriser, måste man normera på ett korrekt sätt, så att systemvektorn och spridningsmatrisen blir ekvivalenta målbeskrivningar. Betecknas normeringsfaktorn med α kan basmatriserna samlas i en 4-vektor, vars komponenter är 2x2-matriser

$$\Psi_P = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} = (\Psi_{P_0} \quad \Psi_{P_1} \quad \Psi_{P_2} \quad \Psi_{P_3}). \quad (\text{A.4.15})$$

Vi skriver utvecklingen av **S** i dessa komponenter på följande sätt (Cloude och Pottier, 1996)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 k_{P_\mu} \Psi_{P_\mu}. \quad (\text{A.4.16})$$

Multiplitera med Ψ_{P_ν} från höger, bilda spåret för matriserna i båda leden och beakta normeringsvillkoret (A.4.14) för Paulimatriserna. Då fås följande uttryck på utvecklingskoefficienterna

$$k_{P_\nu} = \frac{1}{\alpha^2} \text{Tr} \mathbf{S} \Psi_{P_\nu}. \quad (\text{A.4.17})$$

Med koefficienterna kan man bilda en 4-dimensionell, koherent **målvektor**, som enl. (A.4.15) och (A.4.16) blir

$$\mathbf{k}_P = \begin{pmatrix} k_{P_0} \\ k_{P_1} \\ k_{P_2} \\ k_{P_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} s_{11} + s_{22} \\ s_{11} - s_{22} \\ s_{12} + s_{21} \\ i(s_{12} - s_{21}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.18})$$

Normeringskonstanten bestäms av villkoret att målvektorns norm

$$|\mathbf{k}_P| = \sqrt{\mathbf{k}_P^\dagger \mathbf{k}_P} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2(|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 + |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2)}, \quad (\text{A.4.19})$$

skall vara lika med spridningsmatrisens norm,

$$\sqrt{\text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger)} = \sqrt{|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 + |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2}. \quad (\text{A.4.20})$$

Detta uttrycker att man håller den totalt tillgängliga effekten från målet invariant mellan de båda målbeskrivningarna, då målet belyses med två ortogonalt polariserade antenner. Man får $\alpha = \sqrt{2}$, och

Webers (1995) är vanlig i kvantmekaniken, medan Schmieder (1969) följer en "naturlig" ordningsföljd, lämplig vid formella beräkningar.

$$\mathbf{k}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s_{11} + s_{22} \\ s_{11} - s_{22} \\ s_{12} + s_{21} \\ i(s_{12} - s_{21}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.21})$$

Målvektorn innehåller samma information som spridningsmatrisen, bl.a. den absoluta fasen. Denna elimineras genom att man bildar yttre produkten mellan $\mathbf{k}_P$ och $\mathbf{k}_P^*$. Nomenklaturen blir här något olycklig. En beskrivning genom effektstorheter kallas som nämnts inkoherent, medan den matris som bildas av den yttre produkten kallas **målets koherensmatris** i analogi med vågens koherensmatris, se avsnitt A.5.1. Definitionen är alltså

$$\mathbf{T} = \langle \mathbf{k}_P \mathbf{k}_P^\dagger \rangle. \quad (\text{A.4.22})$$

Här betecknar $\langle \cdot \rangle$ tids- eller rumsmedelvärde, beroende på om man studerar tids- eller rumsvariationer. Denna matris är hermitesk, d.v.s. $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}$, eftersom

$$\mathbf{T}^\dagger = \langle \mathbf{k}_P \mathbf{k}_P^\dagger \rangle^\dagger = \langle \mathbf{k}_P \mathbf{k}_P^\dagger \rangle = \mathbf{T}. \quad (\text{A.4.23})$$

Den innehåller information om varians och korrelation hos alla komplexa elementen i spridningsmatrisen $\mathbf{S}$.

[Vi har här använt Pauli-matriserna som en ortonormalbas för att generera en målvektor från vilken man kan definiera andra ordningens statistik i form av koherensmatrisen. En alternativ tolkning är att betrakta tillämpningen av (A.4.16) på ett deterministiskt mål, där utvecklingen av spridningsmatrisen $\mathbf{S}$ ses som en koherent summa av spridningsmatriser hos fyra enkelspridare (se avsnitt A.6.1), där den första är en plan yta, den andra och tredje diedrar med orienteringen 45° relativt varandra och den sista en spridare som transformerar varje infallande polarisation till den ortogonala (Cloude och Pottier, 1996). Detta är ett exempel på koherent måluppdelning med fysikalisk tolkning, som bl.a. tillämpats vid FOA för stridsvagnsmodellering på mm-våglängder (Kjellgren, Nilsson och Sume, 1992, 1993).]

I det monostatiska fallet (bakåtspridning) är spridningsmatrisen symmetrisk, $s_{12} = s_{21}$. Det är då uppenbart att en utveckling av $\mathbf{S}$ enligt (A.4.16) inte kan innehålla någon σ_3 -komponent, som är antisymmetrisk i de icke-diagonala elementen, d.v.s. k_{P_3} måste vara noll. Man använder i detta fall ofta en reducerad, 3-dimensionell målvektor, som blir

$$\mathbf{k}_{3P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s_{11} + s_{22} \\ s_{11} - s_{22} \\ 2s_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.24})$$

Normeringen är vald så att

$$|\mathbf{k}_{3P}|^2 = \mathbf{k}_{3P}^\dagger \mathbf{k}_{3P} = \text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger) = |s_{11}|^2 + 2|s_{12}|^2 + |s_{22}|^2. \quad (\text{A.4.25})$$

Utvecklingen (A.4.16) blir

$$\mathbf{S} = \frac{s_{11} + s_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{s_{11} - s_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.26})$$

För vissa beräkningar är det fördelaktigt att införa speciella beteckningar för utveckningskoefficienterna enligt

$$a = \frac{s_{11} + s_{22}}{2}, \quad b = \frac{s_{11} - s_{22}}{2}, \quad c = s_{12}. \quad (\text{A.4.27})$$

Med dessa kan $\mathbf{S}$ skrivas

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.28})$$

En 3x3 hermitesk koherensmatris definieras som tidigare

$$\mathbf{T}_3 = \langle \mathbf{k}_{3P} \mathbf{k}_{3P}^\dagger \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} |k_{3P_0}|^2 & k_{3P_0} k_{3P_1}^* & k_{3P_0} k_{3P_2}^* \\ k_{3P_1} k_{3P_0}^* & |k_{3P_1}|^2 & k_{3P_1} k_{3P_2}^* \\ k_{3P_2} k_{3P_0}^* & k_{3P_2} k_{3P_1}^* & |k_{3P_2}|^2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (\text{A.4.29})$$

Matrisen har reella diagonalelement och kan skrivas i följande form i termer av reella parametrar (Cloude och Pottier, 1996), de s.k. Huynen-parametrarna $A_0, B_0, B, C, D, E, F, G, H$ (Huynen, 1985, 1987)

$$\mathbf{T}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2A_0 & C - iD & H + iG \\ C + iD & B_0 + B & E + iF \\ H - iG & E - iF & B_0 - B \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (\text{A.4.30})$$

Identifikation med (A.4.29), med (A.4.16) insatt, ger följande samband mellan Huynenparametrarna och spridningsmatriskoeficienterna⁴

$$A_0 = \frac{1}{4}(s_{11}s_{11}^* + s_{11}s_{22}^* + s_{22}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^*), \quad (\text{A.4.31a})$$

$$B_0 = \frac{1}{4}(s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* + 4s_{12}s_{12}^* - s_{11}s_{22}^* - s_{11}^*s_{22}), \quad (\text{A.4.31b})$$

$$B = \frac{1}{4}(s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* - 4s_{12}s_{12}^* - s_{11}s_{22}^* - s_{11}^*s_{22}), \quad (\text{A.4.31c})$$

$$C = \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* - s_{22}s_{22}^*), \quad (\text{A.4.31d})$$

$$D = -\frac{i}{2}(s_{11}s_{22}^* - s_{11}^*s_{22}), \quad (\text{A.4.31e})$$

$$E = \frac{1}{2}(s_{11}s_{12}^* + s_{11}^*s_{12} - s_{22}s_{12}^* - s_{22}^*s_{12}), \quad (\text{A.4.31f})$$

$$F = -\frac{i}{2}(s_{11}s_{12}^* - s_{11}^*s_{12} + s_{22}s_{12}^* - s_{22}^*s_{12}), \quad (\text{A.4.31g})$$

$$G = -\frac{i}{2}(s_{11}s_{12}^* - s_{11}^*s_{12} - s_{22}s_{12}^* + s_{22}^*s_{12}), \quad (\text{A.4.31h})$$

$$H = \frac{1}{2}(s_{11}s_{12}^* + s_{11}^*s_{12} + s_{22}s_{12}^* + s_{22}^*s_{12}). \quad (\text{A.4.31i})$$

Matrisen innehåller nio parametrar. Som vi sett ovan kan ett *konstant* mål beskrivas av fem oberoende parametrar. Detta innebär att det finns fyra samband mellan matriselementen i detta fall; dessa är inte oberoende.

Huynenparametrarnas betydelse består i att de är associerade med geometriska egenskaper hos målet (Huynen, 1978; Chaudhuri, Foo och Boerner, 1986; Molinet, 1991; Pottier, 1992). Följande tabell ger en översikt (Lee och Pottier, 2009).

⁴Huynen (1995) har en annan normering av målvektorn än Cloude och Pottier (1996), vilket medför att de båda senares parametrar $A_0, B_0, B, C, \dots$ är två gånger Huynens. Här används Cloude och Pottiers normering.

Tabell 4.1. *Huynenparametrarnas geometriska innebörd.*

A_0	är relaterad till målsymmetri: kan ses som retureffekt från regelbundna, jämna, konvexa delar hos spridaren; för en sfär är detta den enda parametern som är skild från noll
B_0	är relaterad till målstruktur: kan ses som retureffekt från effekt från målets oregelbundna, ojämna, icke-konvexa delar
B_0-B	är relaterad till icke-symmetri
B_0+B	är relaterad till målregelbundenhet
C och D	är relaterade till målets form
E och F	är relaterade till vriden form hos målet
G och H	är relaterade till koppling mellan olika måldelar
Mer specifikt:	
C	definierar global form (ett linjemål har stort C)
D	definierar lokal form (skillnad i krökningsradier; diskontinuitet t.ex. en kant)
E	definierar lokal vridning eller yttorsion (men: se Yang m.fl., 2002).
F	definierar global vridning eller målhelicitet (men: se Yang m.fl., 2002).
G	definierar lokal koppling
H_ψ	definierar global koppling på grund av målorientering (rollvinkeln ψ)

Koherensmatrisens element har alltså en viktig fysikalisk/geometrisk tolkning.

A.4.5.2. Vektorisering med lexikografiskt numrerade basmatriser: målets kovariansmatris

Ett annat bassystem av 2x2-matriser, med rättfram, lexikografisk ordningsföljd hos komponentmatriserna är

$$\bar{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.32})$$

Dessa matriser bildar ett fullständigt system och är normerade:

$$\text{Tr} \bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4.33})$$

På samma sätt som ovan normerar man så att den totalt spridda effekten $|s_{11}|^2 + 2|s_{12}|^2 + |s_{22}|^2$ är invariant mellan målbeskrivningarna. Det ger följande val av basmatrisvektor

$$\Psi_L = \left\{ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = (\Psi_{L_0}, \Psi_{L_1}, \Psi_{L_2}, \Psi_{L_3}). \quad (\text{A.4.34})$$

En utveckling av spridningsmatrisen enligt (A.4.16) ger en 4-dimensionell målvektor

$$\mathbf{\Omega}_{4L} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.35})$$

för vilken gäller

$$|\mathbf{\Omega}_{4L}|^2 = \mathbf{\Omega}_{4L}^* \mathbf{\Omega}_{4L} = \text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger) = |s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 + |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2. \quad (\text{A.4.36})$$

Med vektorn $\mathbf{\Omega}_{4L}$ kan man definiera en 4×4 -matris, kallad målets **kovariansmatris** som är hermitesk och ges av ett ensemblemedelvärde

$$\mathbf{C}_4(0) = \langle \mathbf{\Omega}_{4L} \mathbf{\Omega}_{4L}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_{11}s_{11}^* \rangle & \langle s_{11}s_{12}^* \rangle & \langle s_{11}s_{21}^* \rangle & \langle s_{11}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{12}s_{11}^* \rangle & \langle s_{12}s_{12}^* \rangle & \langle s_{12}s_{21}^* \rangle & \langle s_{12}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{21}s_{11}^* \rangle & \langle s_{21}s_{12}^* \rangle & \langle s_{21}s_{21}^* \rangle & \langle s_{21}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{22}s_{11}^* \rangle & \langle s_{22}s_{12}^* \rangle & \langle s_{22}s_{21}^* \rangle & \langle s_{22}s_{22}^* \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.37})$$

Nollan som argument i $\mathbf{C}_4$ indikerar att medelvärdena av de olika produkterna av de tidsberoende matriselementen $\langle s_{ij}(t)s_{kl}^*(t) \rangle$, $(i, j, k, l = 1, 2)$ i högerledet bildas i samma tidpunkt, alltså specialfallet $\tau = 0$ av det allmännare $\langle s_{ij}(t)s_{kl}^*(t + \tau) \rangle$, $(i, j, k, l = 1, 2)$.

I det monostatiska fallet med symmetrisk spridningsmatrise, $s_{12} = s_{21}$, använder man ofta en reducerad 3-dimensionell målvektor, som med samma normering blir

$$\mathbf{\Omega}_{3L} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \sqrt{2}s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.38})$$

Med vektorn kan man definiera en 3x3-kovariansmatris för målet

$$\mathbf{C}_3 = \langle \mathbf{\Omega}_{3L} \mathbf{\Omega}_{3L}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_{11}s_{11}^* \rangle & \sqrt{2}\langle s_{11}s_{12}^* \rangle & \langle s_{11}s_{22}^* \rangle \\ \sqrt{2}\langle s_{12}s_{11}^* \rangle & 2\langle s_{12}s_{12}^* \rangle & \sqrt{2}\langle s_{12}s_{22}^* \rangle \\ \langle s_{22}s_{11}^* \rangle & \sqrt{2}\langle s_{22}s_{12}^* \rangle & \langle s_{22}s_{22}^* \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.39})$$

Matriselementen innehåller alla andra ordningens moment av spridningskoefficienterna s_{ij} . Man kan skriva matrisen i följande form

$$\mathbf{C}_3 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}\beta\sqrt{\delta} & \rho\sqrt{\gamma} \\ \sqrt{2}\beta^*\sqrt{\delta} & 2\delta & \sqrt{2}\varepsilon\sqrt{\gamma\delta} \\ \rho^*\sqrt{\gamma} & \sqrt{2}\varepsilon^*\sqrt{\gamma\delta} & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.40})$$

där

$$\sigma = \langle |s_{11}|^2 \rangle, \quad \delta = \frac{\langle |s_{12}|^2 \rangle}{\langle |s_{11}|^2 \rangle}, \quad \gamma = \frac{\langle |s_{22}|^2 \rangle}{\langle |s_{11}|^2 \rangle}, \quad (\text{A.4.41})$$

$$\rho = \frac{\langle s_{11}s_{22}^* \rangle}{\sqrt{\langle |s_{11}|^2 \rangle \langle |s_{22}|^2 \rangle}}, \quad \beta = \frac{\langle s_{11}s_{12}^* \rangle}{\sqrt{\langle |s_{11}|^2 \rangle \langle |s_{12}|^2 \rangle}}, \quad \varepsilon = \frac{\langle s_{12}s_{22}^* \rangle}{\sqrt{\langle |s_{12}|^2 \rangle \langle |s_{22}|^2 \rangle}}.$$

Diagonalelementen motsvarar återspridd lika- och korspolariserad effekt. Koefficienterna ρ, β, ε representerar korrelationskoefficienter mellan återspridda vågkomponenter för olika kombinationer utsänd och mottagen polarisation (Lüneburg m.fl., 1991). Kovariansmatrisens element har alltså en åskådlig koppling till storheter, som är direkt uppmätbara med en radar med ortogonala kanaler för sändning och mottagning.

A.4.5.3. Kovariansmatrisen vid tidsvariabla mål; spektral formulering

För att inkludera dopplerinformation är det lämpligt att utvidga den tidigare givna definitionen av kovariansmatris genom att betrakta korrelationer i olika tidpunkter, separerade med τ . Vi betraktar i statistisk mening stationära radarmål med tidsberoende spridningsmatriser och utgår från en tidsberoende målvektor (index $3L$ slopas i det följande), som i det monostatiska fallet är

$$\mathbf{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} s_{11}(t) \\ \sqrt{2}s_{12}(t) \\ s_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.42})$$

Kovariansmatrisen definieras analogt med (A.4.39) som en yttre produkt mellan målvektorer, men nu i två olika tidpunkter

$$\mathbf{C}(\tau) = \langle \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{\Omega}^\dagger(t + \tau) \rangle = \begin{pmatrix} \langle s_{11}(t) s_{11}^*(t + \tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{11}(t) s_{12}^*(t + \tau) \rangle & \langle s_{11}(t) s_{22}^*(t + \tau) \rangle \\ \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{11}^*(t + \tau) \rangle & 2 \langle s_{12}(t) s_{12}^*(t + \tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{12}(t) s_{22}^*(t + \tau) \rangle \\ \langle s_{22}(t) s_{11}^*(t + \tau) \rangle & \sqrt{2} \langle s_{22}(t) s_{12}^*(t + \tau) \rangle & \langle s_{22}(t) s_{22}^*(t + \tau) \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.43})$$

Vanligtvis menas med kovariansmatris för ett radarmål uttrycket (A.4.39), som i den utvidgade definitionen (A.4.43) betecknas $\mathbf{C}(0)$.

Vid doppleranalys kan det vara ändamålsenligt att arbeta i spektralområden. Transformationen av (A.4.43) mellan tids- och frekvensområden ges av Wiener-Khinchins teorem (Moiseev m.fl., 2001)

$$F_{ij}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (\text{A.4.44})$$

$$C_{ij}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ij}(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad (\text{A.4.45})$$

där $i,j=1,2,3$ ger en spektral kovariansmatris. Från definitionerna kan man se att den spektrala kovariansmatrisen $\mathbf{F}(\omega)$ är hermitesk, medan kovariansmatrisen $\mathbf{C}(\tau)$ är hermitesk bara för $\tau=0$, eftersom $\mathbf{C}^\dagger(\tau) = \mathbf{C}(-\tau)$ och $\mathbf{F}^\dagger(\omega) = \mathbf{F}(\omega)$.

Man kan definiera olika korskorrelationskoefficienter analogt med (A.4.41). Korskorrelationskoefficienten $\rho_{\text{HV}}(0)$ mellan horisontellt och vertikalt likapolariserade (HH resp. VV) radarreturer är enligt (A.4.41), (A.4.43) och (A.4.44)

$$\rho_{\text{HV}}(0) = \frac{C_{13}(0)}{\sqrt{C_{11}(0)C_{33}(0)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_{13}(\omega) d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F_{11}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F_{33}(\omega) d\omega}}. \quad (\text{A.4.46})$$

I diskret form kan detta skrivas som

$$\rho_{\text{HV}}(0) = \frac{\sum_k F_{13}(\omega_k) \Delta\omega}{\sqrt{\sum_k F_{11}(\omega_k) \Delta\omega \sum_k F_{33}(\omega_k) \Delta\omega}}, \quad (\text{A.4.47})$$

där $\Delta\omega = 2/T$ är dopplerfrekvensupplösningen och T är observationstiden. Uttrycket $F_{ii}(\omega_k) \Delta\omega$ ger variansen hos spridningsmatrisen i k :te intervallet av dopplerfrekvenser. Uttrycket $F_{ij}(\omega_k) \Delta\omega$ ($i \neq j$) ger kovariansen hos motsvarande spridningsmatriselement i k :te dopplerfrekvenscellen. För en individuell dopplercell, k , kan man definiera en spektral korskorrelationskoefficient

$$\rho_{\text{HV}}^k = \frac{F_{13}(\omega_k)}{\sqrt{\sum_k F_{11}(\omega_k) \sum_k F_{33}(\omega_k)}}. \quad (\text{A.4.48})$$

Denna koefficient representerar korrelationen mellan HH och VV för cellen.

A.4.5.4. Vektorisering med allmän bas

De två genomgångna vektoriseringarna av ett måls spridningsmatris är specialfall. Vi kan, som tidigare framgått i början av avsnitt A.4.5, allmänt använda en godtycklig uppsättning av fyra komplexa matriser, som uppfyller villkor på fullständighet och normering. Ett ändrat val av basmatriser ger en motsvarande ny målvektor $\mathbf{k}$, bildad av utvecklingskoefficienterna; man kan tala om en 'förändring av målbasen' för $\mathbf{k}$. Med hjälp av målvektorn bildas matrisen $\mathbf{T} = \langle \mathbf{k} \mathbf{k}^\dagger \rangle$, en allmän koherensmatris för målet.

Då man studerar principer för uppdelning av komplexa mål i enklare delmål (se avsnitt A.6.2) är det av intresse att försöka hitta en uppsättning normerade, ortogonala referensmatriser för utvecklingen av målets spridningsmatris, för vilken koherensmatrisen blir diagonal - alltså lösa egenvärdesproblemet för koherensmatrisen. Eftersom $\mathbf{T}$ är hermitesk (se avsnitt A.4.5.1) har den reella egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och egenvektorerna svarande mot olika egenvärden är ortogonala (Arfken och Weber, 1995). Den diagonaliserade koherensmatrisen blir av formen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4.49})$$

Matrisens icke-diagonala element är lika med noll, vilket betyder att utvecklingskoefficienterna är statistiskt oberoende, jfr (A.4.29).

För att $\mathbf{T}$ skall ha en representation i form av en tidsberoende spridningsmatris, är bara ett av dess egenvärden skilt från noll. Motsvarande egenvektor är den erforderliga målvektorn. För en allmännare medelvärdesmatris ($\mathbf{T} = \langle \mathbf{k} \mathbf{k}^\dagger \rangle$) har man ett spektrum av egenvärden (upp till maximalt tre), och en sådan matris kan modelleras som summan av tre statistiskt oberoende enkla mål, som ges av $\mathbf{T}$'s egenvektorer. I avsnitt A.6.3 motiveras och utvecklas detta vidare.

A.5. Inkoherent vågbeskrivning (effekt)

A.5.1. Vågen: Koherensmatrisen

I praktiken har radarvågformerna en viss bandbredd, $\Delta\omega$. Vi kommer här att koncentrera oss på det smalbandiga fallet och antar att bandbredden är liten, så att vågen kan betraktas som kvasi-monokromatisk.

Som nämndes i Avsnitt A.3.1 är en monokromatisk våg fullständigt polariserad. Vid icke-monokromatiska vågor blir amplitud- och fasfaktorerna i Jones vektor i ekv. (A.4.2) tidsvariabla. Spetsen hos fältstyrkevektorn beskriver då inte en stationär ellips som funktion av tiden i en fix punkt i rummet. Vågen är partiellt polariserad. Det är då oftast lämpligare att övergå till effektmått, speciellt vid stokastiskt variabla fält. Man använder ofta Stokes parametrar, vilka kan definieras med en åskådlig koppling till mätbara effekter i olika linjära och cirkulära polarisationer, se nedan. Bl.a. av beräkningsmässiga skäl är det emellertid mer ekonomiskt att som grundstorhet för en vågbeskrivning med effektmått ta en annan storhet, enligt följande.

Kvadratiska produkter mellan $\mathbf{E}$ och $\mathbf{E}^\dagger$ utgör de enklaste effektmåtten. De enda två kvadratiska formerna är $\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E}$, totala effekten i vågen, och $\mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger$. Den senare formen väljer vi som den grundläggande vågbeskrivningen. Den kallas vågens koherensmatris $\mathbf{J}$, och definieras i det allmänna, tidsvariabla fallet av (Landau och Lifshitz, 1975, s. 120; Perina, 1984; Cho, 1990, s. 80; Moiseev m.fl., 2002)

$$\mathbf{J}(\tau) = \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{E}^\dagger(t + \tau) \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_1(t) E_1^*(t + \tau) \rangle & \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \\ \langle E_2(t) E_1^*(t + \tau) \rangle & \langle E_2(t) E_2^*(t + \tau) \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.1})$$

Här betecknar $\mathbf{E}$ vågens Jones-vektor och $\mathbf{E}^\dagger$ denna vektor transponerad och komplexkonjugerad, d.v.s. $\mathbf{E}^\dagger = (E_1^* \ E_2^*)$. Medelvärdesbildningen $\langle \dots \rangle$ avser ensemblmedelvärde och τ är tidsfördröjningen. Vågen antas uppföra sig som en stationär

stokastisk process. Då är medelvärdena oberoende av tiden t . I fallet kvasi-monokromatiska vågor gäller för tidsfördröjningar $|\tau| \ll 1/\sigma$, där σ är bredden hos vågspektrum,

$$\mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle & \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle \\ \langle E_2(t)E_1^*(t) \rangle & \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.2})$$

Detta uttryck är det som normalt används i radarpolarimetri. Man noterar att $\text{Tr}\mathbf{J}(0) = \langle E_1E_1^* \rangle + \langle E_2E_2^* \rangle$, vågens totala effekt. Den används som normeringsstorhet. Man ser också ur definitionen och (A.5.2) att fasen hos fältstyrkorna endast kommer in som en skillnadsfas (relativ, inte absolut fas).

Vid t.ex. doppleralys kan det vara ändamålsenligt att arbeta i spektraldomänen. Transformationen av (A.5.1) från tids- till frekvensdomänen ges av Wiener-Khinchins teorem (Moiseev m.fl., 2002)

$$F_{ij}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} J_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (\text{A.5.3})$$

med sin inversa form

$$J_{ij}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ij}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (\text{A.5.4})$$

där indexen $i, j = 1, 2, 3$. Detta ger en spektral koherensmatris

$$\mathbf{F}(\omega) = \begin{pmatrix} F_{11}(\omega) & F_{12}(\omega) \\ F_{21}(\omega) & F_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.5})$$

A.5.2. Vektorisering av koherensmatrisen: Stokes vektor

Stokes-parametrarna, som bildar en 4-dimensionell vektor, **Stokes vektor**, erhålles genom en vektorisering av koherensmatrisen, analog med skapandet av *målets* koherensvektor genom vektorisering av spridningsmatrisen $\mathbf{S}$. Vi utvecklar $\mathbf{J}(0) \equiv \mathbf{J}$ i ett fullständigt system av 2x2-matriser. Ett sådant system är de tidigare införda Pauli-matriserna

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.6})$$

En godtycklig 2x2-matris $\mathbf{A}$ kan utvecklas i denna uppsättning

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu} \sigma_{\mu}. \quad (\text{A.5.7})$$

Om man multiplicerar med σ_{ν} från höger, bildar spåret för matriserna i båda leden och utnyttjar ortogonalitets- och normeringsvillkoret (A.4.14), fås följande uttryck på utvecklingskoefficienterna

$$A_{\mu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{A} \sigma_{\mu}. \quad (\text{A.5.8})$$

För koherensmatrisen fås

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \text{Tr} \{ \mathbf{J} \sigma_{\mu} \} \sigma_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} g_{\mu} \sigma_{\mu}, \quad (\text{A.5.9})$$

där koefficienterna g_{μ} , **Stokes parametrar**, definieras av

$$g_{\mu} = \text{Tr} \{ \mathbf{J} \sigma_{\mu} \}. \quad (\text{A.5.10})$$

Det fyra parametrarna är explicit

$$\begin{aligned}
g_0 &= \text{Tr}\{\mathbf{J}\sigma_0\} = \langle E_1 E_1^* \rangle + \langle E_2 E_2^* \rangle, \\
g_1 &= \text{Tr}\{\mathbf{J}\sigma_1\} = \langle E_1 E_1^* \rangle - \langle E_2 E_2^* \rangle, \\
g_2 &= \text{Tr}\{\mathbf{J}\sigma_2\} = \langle E_1 E_2^* \rangle + \langle E_2 E_1^* \rangle, \\
g_3 &= \text{Tr}\{\mathbf{J}\sigma_3\} = i(\langle E_1 E_2^* \rangle - \langle E_2 E_1^* \rangle).
\end{aligned}
\tag{A.5.11}$$

Uttryckt i Stokes parametrar blir koherensmatrisen

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_0 + g_1 & g_2 - ig_3 \\ g_2 + ig_3 & g_0 - g_1 \end{pmatrix}.
\tag{A.5.12}$$

Man kan visa att de fyra parametrarna kan ges en åskådlig tolkning, kopplad till uppmätbara effekter i olika polarisationer (Azzam och Bashara, 1987, s. 56-57):

g_0 är total effekt i vågen

g_1 är skillnaden mellan linjärpolariserad effekt utmed horisontal- och vertikalriktningarna,

g_2 är skillnaden mellan linjärpolariserad effekt utmed riktningarna som bildar $+45^\circ$ resp. -45° med horisontalriktningen.,

g_3 är skillnaden mellan cirkulär vänster- och höger-polariserad effekt.

Som nämnts ovan, tas detta ofta som definition av parametrarna. Med hjälp av parametrarna kan man bilda en 4-dimensionell vektor, **Stokes vektor**

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.
\tag{A.5.13}$$

Som nämnts kan man införa andra parametrar för vågbeskrivning, ekvivalenta med Stokes parametrar. Man gör på samma sätt som ovan - man utvecklar koherensmatrisen i ett fullständigt system av 2x2-matriser, men med ett annat val än Pauli-matriserna. Ett sådant är de lexikografiskt numrerade matriserna

$$\bar{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\tag{A.5.14}$$

Med de fyra utvecklingskoefficienterna kan man bilda en 4-dimensionell vektor, som kan kallas vågens koherensvektor (Schmieder, 1969), ekvivalent med Stokes vektor.

A.5.3. Polarisationsgrad

En våg med fullständigt stokastiskt varierande polarisation har ingen företrädespolarisation. Enligt den åskådliga tolkningen av Stokes parametrar i föregående avsnitt gäller då att $g_1 = g_2 = g_3 = 0$. Värden skilda från noll indikerar att det finns en polariserad komponent hos vågen. För att kvantifiera detta inför man **polarisationsgraden**

$$P = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}{g_0}.
\tag{A.5.15}$$

För en stokastiskt polariserad ("opolariserad") våg är $P=0$, medan för en fullständigt polariserad våg gäller att $P=1$, eftersom i detta fall $g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ [enl. (A.5.11) med E_1, E_2 konstanta]. För en partiellt polariserad våg ligger polarisationsgraden mellan dessa båda ytterlighetsvärden.

Polarisationsgraden kan också uttryckas med hjälp av koherensmatrisen. Man finner genom substitution av (A.5.11) i (A.5.15) och ur definitionen (A.5.2)

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{J}}{(\text{Tr} \mathbf{J})^2}}. \quad (\text{A.5.16})$$

I denna form är P uttryckt i storheter som är oberoende av vilken polarisationsbas man använder; $\det \mathbf{J}$ och $\text{Tr} \mathbf{J}$ är nämligen invarianta under byte av bas (Cho, 1990). Uttrycket (A.5.16) kan därför tas som den allmänna definitionen av polarisationsgrad.

Uttrycket (A.5.16) kan också skrivas

$$P = \frac{\sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}}}{J_{11} + J_{22}}. \quad (\text{A.5.17})$$

För en opolariserad våg är koherensmatrisen $\mathbf{J}$ diagonal, eftersom en sådan våg inte har någon företrädespolarisation, vilket innebär att $\langle |E_1|^2 \rangle = \langle |E_2|^2 \rangle$ och $\langle E_1 E_2^* \rangle = 0$. En partiellt polariserad våg kan representeras som summan av en fullständigt polariserad våg och en opolariserad våg (Born och Wolf, 1999, avsnitt 10.9.2). I matematisk form

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5.18})$$

där den första resp. andra matrisen representerar koherensmatrisen för den opolariserade vågen respektive den fullständigt polariserade vågen. Man finner att storheterna A, B, C, D uttryckta i koherensmatriselementen blir

$$A = \frac{1}{2} (\text{Tr} \mathbf{J} - \sqrt{\text{Tr}^2 \mathbf{J} - 4 \det \mathbf{J}}), \quad (\text{A.5.19a})$$

$$B = \frac{1}{2} [(J_{11} - J_{22}) + \sqrt{\text{Tr}^2 \mathbf{J} - 4 \det \mathbf{J}}], \quad (\text{A.5.19b})$$

$$C = \frac{1}{2} [(J_{22} - J_{11}) + \sqrt{\text{Tr}^2 \mathbf{J} - 4 \det \mathbf{J}}], \quad (\text{A.5.19c})$$

$$D^* = J_{21}. \quad (\text{A.5.19d})$$

Utvecklingen (A.5.18) är unik.

A.5.4. Målet: Mueller- och Kennaughmatriserna

Vi skall nu se hur ett mål transformerar de fyra Stokes-parametrarna hos en våg, som sprids av målet, enligt det allmänna uttrycket (A.3.1). Transformationen vill vi uttrycka med en 4×4 -matris, vars element vi vill uttrycka i spridningsmatrisens $\mathbf{S}$'s element. Vi behandlar här ett stationärt mål där $\mathbf{S}$ inte beror av tiden.

Vi utgår alltså från att radarmålet åstadkommer en linjär transformation $\mathbf{S}$ av det infallande fältet $\mathbf{E}$ till $\mathbf{E}'$ enligt (A.4.3). Den transformerade koherensmatrisen är

$$\mathbf{J}' = \langle \mathbf{E}' \mathbf{E}'^\dagger \rangle = \langle \mathbf{S} \mathbf{E} (\mathbf{S} \mathbf{E})^\dagger \rangle = \langle \mathbf{S} \mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger \mathbf{S}^\dagger \rangle = \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^\dagger, \quad (\text{A.5.20})$$

där vi utnyttjat att $\mathbf{S}$ är tidsberoende och att för produkten mellan två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ gäller $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ (Arfken och Weber, 1995). Nu utvecklar vi $\mathbf{J}'$ i systemet av Pauli-matriser

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \text{Tr} \{ \mathbf{J}' \sigma_{\mu} \} \sigma_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} g'_{\mu} \sigma_{\mu}, \quad (\text{A.5.21})$$

där de transformerade Stokes-parametrarna är

$$g'_{\mu} = \text{Tr} \{ \mathbf{J}' \sigma_{\mu} \}. \quad (\text{A.5.22})$$

Detta kan skrivas

$$g'_{\mu} = \text{Tr} \{ \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^\dagger \sigma_{\mu} \} = \text{Tr} \{ \mathbf{J} \mathbf{S}^\dagger \sigma_{\mu} \mathbf{S} \} = \text{Tr} \{ \mathbf{J} \sigma'_{\mu} \}, \quad (\text{A.5.23})$$

där

$$\sigma'_\mu = \mathbf{S}^\dagger \sigma_\mu \mathbf{S}. \quad (\text{A.5.24})$$

I (A.5.23) har vi använt oss av att spåret förblir oförändrat vid cyklisk permutation av matriserna i en produkt (Arfken och Weber, 1995, s. 171). Inför vi nu utvecklingen (A.5.9) för $\mathbf{J}$ fås

$$\begin{aligned} g'_\mu &= \text{Tr}\{\sigma'_\mu \frac{1}{2} \sum_v \text{Tr}[\mathbf{J}\sigma_v]\sigma_v\} = \frac{1}{2} \sum_v \text{Tr}\{\sigma'_\mu \sigma_v \text{Tr}[\mathbf{J}\sigma_v]\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_v \text{Tr}\{\sigma'_\mu \sigma_v\} \text{Tr}\{\mathbf{J}\sigma_v\} = \sum_v M_{\mu\nu} g_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.5.25})$$

d.v.s.

$$\mathbf{g}' = \mathbf{M}\mathbf{g}, \quad (\text{A.5.26})$$

vilket motsvarar det allmänna uttrycket (A.3.1). Därmed har vi funnit transformationen av Stokes parametrar, definierad av en matris $\mathbf{M}$, **Mueller-matrisen** (ibland även kallad Stokes-matrisen)

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\sigma'_\mu \sigma_\nu\}. \quad (\text{A.5.27})$$

Matrisen är specifikt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr}\sigma'_0\sigma_0 & \text{Tr}\sigma'_0\sigma_1 & \text{Tr}\sigma'_0\sigma_2 & \text{Tr}\sigma'_0\sigma_3 \\ \text{Tr}\sigma'_1\sigma_0 & \text{Tr}\sigma'_1\sigma_1 & \text{Tr}\sigma'_1\sigma_2 & \text{Tr}\sigma'_1\sigma_3 \\ \text{Tr}\sigma'_2\sigma_0 & \text{Tr}\sigma'_2\sigma_1 & \text{Tr}\sigma'_2\sigma_2 & \text{Tr}\sigma'_2\sigma_3 \\ \text{Tr}\sigma'_3\sigma_0 & \text{Tr}\sigma'_3\sigma_1 & \text{Tr}\sigma'_3\sigma_2 & \text{Tr}\sigma'_3\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.5.28})$$

Indexnumreringen från noll till tre i sista ledet används traditionellt i optisk polarimetri.

Givet spridningsmatrisen $\mathbf{S}$ kan Muellermatrisen direkt beräknas ur (A.5.27) och (A.5.24). Muellermatrisens specifika utseende beror av den valda definitionen av Paulimatriserna σ_μ och på valet av koordinatsystem (Cloude och Pottier, 1996, speciellt sid. 501; Sadjadi m.fl. 2005). Med valet av Paulimatriser enligt (A.5.6) och en spridningsmatris $\mathbf{S}$ med elementen $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$ blir elementen hos $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} m_{00} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{12}s_{12}^* + s_{21}s_{21}^* + s_{22}s_{22}^*), \\ m_{01} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* - s_{12}s_{12}^* + s_{21}s_{21}^* - s_{22}s_{22}^*), \\ m_{02} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* + s_{21}s_{22}^* + s_{22}s_{21}^*), \\ m_{03} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* - s_{21}s_{22}^* + s_{22}s_{21}^*), \\ m_{10} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{12}s_{12}^* - s_{21}s_{21}^* - s_{22}s_{22}^*), \\ m_{11} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* - s_{12}s_{12}^* - s_{21}s_{21}^* + s_{22}s_{22}^*), \\ m_{12} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* - s_{21}s_{22}^* - s_{22}s_{21}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{13} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* + s_{21}s_{22}^* - s_{22}s_{21}^*), \\
m_{20} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* + s_{22}s_{12}^*), \\
m_{21} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{21}^* - s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* - s_{22}s_{12}^*), \\
m_{22} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* + s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*), \\
m_{23} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* - s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*), \\
m_{30} &= \frac{i}{2} (s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* - s_{21}s_{11}^* - s_{22}s_{12}^*), \\
m_{31} &= \frac{i}{2} (s_{11}s_{21}^* - s_{12}s_{22}^* - s_{21}s_{11}^* + s_{22}s_{12}^*), \\
m_{32} &= \frac{i}{2} (s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* - s_{21}s_{12}^* - s_{22}s_{11}^*), \\
m_{33} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{22}^* - s_{12}s_{21}^* - s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*).
\end{aligned} \tag{A.5.29}$$

Vi noterar att den här definierade matrisen $\mathbf{M}$ inte är symmetrisk. Den infördes ursprungligen inom optiken för att beskriva framåtspridningen av en våg. Den spridningsmatris som ingår i ovanstående formler uttrycks enligt FSA- (*Forward Scatter Alignment*) koordinatformuleringen, där koordinatsystemet är knutet till vågens utbredningsriktning. Ett kompakt sätt att definiera $\mathbf{M}$ är (med $\mathbf{S}$ enligt FSA-konventionen)

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)\mathbf{A}^{-1}, \tag{A.5.30}$$

där $\otimes$ betecknar direkta produkten (Kroneckers produkt), se avsnitt 4.2.2.5, och där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.5.31}$$

Matrisen $\mathbf{M}$ kan experimentellt mätas upp med bara amplitudmätning, d.v.s. utan behov av fasmätning. De relativa fasförhållandena finns inbyggda i matrisens koefficienter. Matrisen har också nackdelar. Från (A.5.29) ser man att det är svårt att förutsäga vilken effekt en ändring i spridningsmatrisens element har på $\mathbf{M}$. Det gör en fysikalisk tolkning av elementen hos $\mathbf{M}$ svår, vilket är ett pris som man får betala för att ha utgått från en så enkel fenomenologisk modell av spridningsprocessen (lineariteten). Matrisen leder också till stora svårigheter vid vidareutveckling av teorin (Cloude, 1986, s. 63). Man kan göra en jämförelse med målets koherensmatris. Denna är en komplex korrelationsmatris, och som en sådan har den en klarare tolkning än Muellermatrisen, t.ex. i fråga om egenvärden (Cloude, 1992).

En alternativ matris som introducerats för radar är Kennaugh-matrisen, $\mathbf{K}$. Den är i motsats till $\mathbf{M}$ knuten till problemet att beräkna den mottagna effekten av en radar, som bl.a. innehåller överväganden av antennpolarisationer, se Mott (2007). I en kompakt definition ges $\mathbf{K}$ av

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^*(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)\mathbf{A}^{-1}, \tag{A.5.32}$$

där spridningsmatrisen $\mathbf{S}$ uttrycks enligt BSA (*Backscatter Alignment*)-konventionen. $\mathbf{K}$ är liksom $\mathbf{S}$ symmetrisk. Elementen hos $\mathbf{K}$ är, med samma indexnumrering från noll till tre som använts ovan för $\mathbf{M}$,

$$\begin{aligned}
k_{00} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{12}s_{12}^* + s_{21}s_{21}^* + s_{22}s_{22}^*), \\
k_{01} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* - s_{12}s_{12}^* + s_{21}s_{21}^* - s_{22}s_{22}^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{02} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* + s_{21}s_{22}^* + s_{22}s_{21}^*), \\
k_{03} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* - s_{21}s_{22}^* + s_{22}s_{21}^*), \\
k_{10} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{12}s_{12}^* - s_{21}s_{21}^* - s_{22}s_{22}^*), \\
k_{11} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* - s_{12}s_{12}^* - s_{21}s_{21}^* + s_{22}s_{22}^*), \\
k_{12} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* - s_{21}s_{22}^* - s_{22}s_{21}^*), \\
k_{13} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{12}^* + s_{12}s_{11}^* + s_{21}s_{22}^* - s_{22}s_{21}^*), \\
k_{20} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* + s_{22}s_{12}^*), \\
k_{21} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{21}^* - s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* - s_{22}s_{12}^*), \\
k_{22} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* + s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*), \\
k_{23} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* - s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*), \\
k_{30} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{21}^* - s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* + s_{22}s_{12}^*), \\
k_{31} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* + s_{21}s_{11}^* - s_{22}s_{12}^*), \\
k_{32} &= \frac{i}{2} (-s_{11}s_{22}^* - s_{12}s_{21}^* + s_{21}s_{12}^* + s_{22}s_{11}^*), \\
k_{33} &= \frac{1}{2} (-s_{11}s_{22}^* + s_{12}s_{21}^* + s_{21}s_{12}^* - s_{22}s_{11}^*).
\end{aligned} \tag{A.5.33}$$

Matrisen kan förenklas i det monostatiska fallet där $s_{12} = s_{21}$ (i BSA-konventionen), vilket ger

$$\begin{aligned}
k_{00} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* + 2s_{12}s_{12}^*), \\
k_{01} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* - s_{22}s_{22}^*), \\
k_{02} &= \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\}, \\
k_{03} &= \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\}, \\
k_{10} &= k_{01}, \\
k_{11} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* - 2s_{12}s_{12}^*), \\
k_{12} &= \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\}, \\
k_{13} &= \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\}, \\
k_{20} &= k_{02}, \\
k_{21} &= k_{12}, \\
k_{22} &= \frac{1}{2} (s_{11}s_{22}^* + s_{22}s_{11}^* + 2s_{12}s_{12}^*), \\
k_{23} &= \operatorname{Im}(s_{11}s_{22}^*), \\
k_{30} &= k_{03}, \\
k_{31} &= k_{13}, \\
k_{32} &= k_{23},
\end{aligned} \tag{A.5.34}$$

$$k_{33} = \frac{1}{2}(-s_{11}s_{22}^* - s_{22}s_{11}^* + 2s_{12}s_{12}^*),$$

d.v.s.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* + 2s_{12}s_{12}^*) & \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* - s_{22}s_{22}^*) & \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\} & \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\} \\ \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* - s_{22}s_{22}^*) & \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* + s_{22}s_{22}^* - 2s_{12}s_{12}^*) & \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\} & \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\} \\ \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\} & \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\} & \frac{1}{2}(s_{11}s_{22}^* + s_{22}s_{11}^* + 2s_{12}s_{12}^*) & \operatorname{Im}(s_{11}s_{22}^*) \\ \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\} & \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\} & \operatorname{Im}(s_{11}s_{22}^*) & \frac{1}{2}(-s_{11}s_{22}^* - s_{22}s_{11}^* + 2s_{12}s_{12}^*) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5.35})$$

Alla elementen är reella och matrisen är symmetrisk. Den kan uttryckas i de tidigare (A.4.5.1) införda Huynenparametrarna,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} A_0 + B_0 & C & H & F \\ C & A_0 + B & E & G \\ H & E & A_0 - B & D \\ F & G & D & -A_0 + B_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5.36})$$

där parametrarna uttryckt i spridningsmatriselementen ges av A.4.31 som kan förenklas något:

$$A_0 = \frac{1}{4}|s_{11} + s_{22}|^2,$$

$$B_0 = \frac{1}{4}|s_{11} - s_{22}|^2 + |s_{12}|^2,$$

$$B = \frac{1}{4}|s_{11} - s_{22}|^2 - |s_{12}|^2,$$

$$C = \frac{1}{2}(s_{11}s_{11}^* - s_{22}s_{22}^*), \quad (\text{A.5.37})$$

$$D = \operatorname{Im}(s_{11}s_{22}^*),$$

$$E = \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\},$$

$$F = \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} - s_{22})\},$$

$$G = \operatorname{Im}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\},$$

$$H = \operatorname{Re}\{s_{12}^*(s_{11} + s_{22})\},$$

Här kan nämnas att även Huynen (1970, 1987) introducerat väsentligen $\mathbf{K}$ -matrisen (med annan normering och elementordning), utgående från spänningsekvationen (avsnitt 4.2.2.1) och en detaljerad härledning, men kallar den Stokes reflektionsmatris och betecknar den med $\mathbf{M}$. Sambanden mellan $\mathbf{M}$ och $\mathbf{K}$ har bl.a. beskrivits av Guissard (1994) som också redogör för snårskogen av olika definitioner, benämningar etc., som använts i olika publikationer. Som tidigare nämnts bör man säkrast använda nyare referenser, där teoretiska svårigheter förhoppningsfullt är utredda, t.ex. böckerna av Mott (2007), Lee och Pottier (2009) samt av Cloude (2010).

Behandlingen ovan har antagit ett stationärt mål med en tidsberoende spridningsmatris, ett koherent spridande mål. Man kan införa generaliserade matriser med medelvärdesbildade koefficienter, som gäller för ett tidsberoende fall, med ett inkoherent spridande, depolariserande mål. En detaljerad genomgång har getts av Mott (2007), kap. 7.

A.6. Några enkla reflektorer; måluppdelningsteorier för komplexa spridare

A.6.1. Några enkla reflektorers polarisationsegenskaper

I det följande ges några exempel på spridningsmatriser för några enkla radarreflektorer. Reflektorerna bildas av plana, konvexa eller konkava ytor med enkel form, eller av linjer. Tabell A.6.1 visar spridningsmatrisen, såväl på en faktor proportionell mot roten ur radarmålarean, hos några sådana typreflektorer, uttryckta i ett linjärt polarisationsbassystem. Formlerna är kortvågsapproximationer, med våglängden mycket mindre än reflektorernas dimensioner.

Man noterar att en plan platta, sfär och trieder har samma polarisationsmatris i den antagna kortvågsapproximationen. Man kan dela in enkla radarreflektorer av denna typ i klasser, beroende på om ett jämnt eller udda antal delytor är verksamma vid återlänknings av den infallande radarvågen tillbaka mot radarn. Den plana plattan, sfären och triedern tillhör den **udda** klassen, diedern och hatten den **jämna**. Dessa två klasser utgör grunden för ett enkelt klassificeringsschema.

I verkligheten förekommer de enkla reflektorerna företrädesvis i artefakter (föremål tillverkade av människan). Man kan emellertid finna exempel även i naturlig miljö, såsom cylindriska trädstammar över plan mark eller vass som sticker upp ur vatten. Har man en föreställning om hur den polarimetriska signaturen kan modelleras, kan detta vara till hjälp för förbättring av detekterings-, klassificerings och följestanda, s.k. **modellbaserad** signaturanalys, se t.ex. Freeman och Durden (1998).

En annan viktig användning av de enkla reflektorerna är som kalibreringsreflektorer.

A.6.2. Måluppdelning

Polarimetriska data ger en möjlighet att dela upp spridningen från ett mål i delbidrag av olika natur. Detta kan matematiskt uttryckas som en uppdelning av målets polarisationstransformationsmatris ($\mathbf{O}$ i Figur A.3 i någon koherent eller inkoherent formulering) i komponentmatriser, som är förknippade med specifika spridningsegenskaper hos punktspridare, spridare med utsträckning och ensembler av sådana spridare. Olika måluppdelningsprinciper har föreslagits för detta ändamål. Lee och Pottier (2009) delar upp måluppdelningsmetoderna i fyra klasser.

1) Uppdelning av en målmatris, exempelvis koherensmatrisen $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_N$, där $\mathbf{T}_0$ utgör ett "effektivt" mål med en ekvivalent spridningsmatris, medan $\mathbf{T}_N$ representerar en rest utan någon ekvivalent spridningsmatris. Denna uppdelning är inspirerad av uppdelningen av en vågs koherensmatris i en fullständigt polariserad och en opolariserad del (Avsnitt A.5.3).

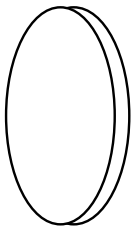
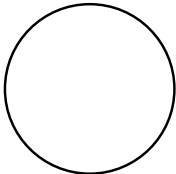
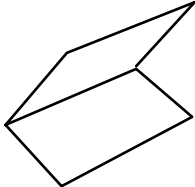
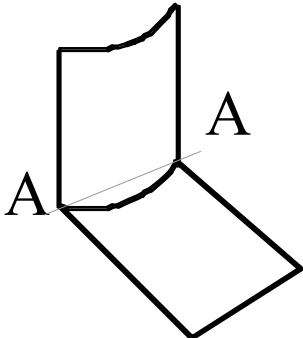
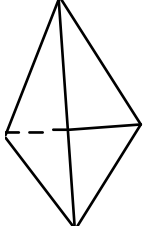
2) Modellbaserad uppdelning av kovariansmatrisen $\mathbf{C}_3$ eller $\mathbf{T}_3$ baserad på fysiken och geometrin hos spridningen, jfr föregående avsnitt A.6.1.

3) Egenvektor- eller egenvärdesanalys av kovariansmatrisen $\mathbf{C}_3$ eller koherensmatrisen $\mathbf{T}_3$.

4) Koherent uppdelning av spridningsmatrisen.

Här skall vi kort beskriva de två sista grupperna.

Tabell A.6.1. Några enkla reflektortyper och deras polarisationsmatriser.

	Reflektor	Polarisationsmatris
	Plan platta	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Sfär	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Rätvinklig dieder ; fogens lutning mot horisontalplanet $= \psi$	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$
	Del av cylinderhatt : cylindrisk mantelyta sammanfogad i rät vinkel med plan platta; A-A lutar vinkeln ψ mot horisontalplanet	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$
	Trieder med triangulära sidoytor	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Linje , vinkelrät mot vågens utbredningsriktning; lutning mot horisontalplanet $= \psi$	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}$
	Vänstergängad spiral	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$
	Högergängad spiral	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

A.6.3. Cloudes egenvektorbaserade uppdelning; målentropi

Cloude (1985, 1992) har föreslagit en matrisuppdelning av målets koherensmatris $[T = \langle \mathbf{k} \mathbf{k}^\dagger \rangle]$, där $\mathbf{k}$ är målvektorn, se avsnitt A.4.5.1], baserad på denna matris egenvektorer. Man får då automatiskt en uppdelning, som är invariant under byte av polarisationsbasvektorer.

Koherensmatrisen T är hermitesk med reella egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och motsvarande ortonormerade egenvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Arfken och Weber, 1995, s. 204). Matrisen T kan diagonaliseras till matrisen Λ medelst en unitär matris U_3 ($U_3^\dagger = U_3^{-1}$):

$$\Lambda = U_3^{-1} T U_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6.1})$$

där U_3 är egenvektormatrisen

$$U_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \quad (\text{A.6.2})$$

T kan skrivas som en (icke-koherent) viktad summa av tre enkla mål, vars målvektorer är egenvektorer till T ; viktningskoefficienterna utgörs av egenvärdena:

$$T = U_3 \Lambda U_3^{-1} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\dagger + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\dagger. \quad (\text{A.6.3})$$

Matematiskt är detta en **spektraluppdelning** av T (Strang, 1988, s. 296). Var och en av egenvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, uppfattad som målvektor, har en representation i form av en (tidsberoende) spridningsmatris, som svarar mot ett (konstant) mål som ger en fullständigt polariserad retur från en fullständigt polariserad infallande våg (ingen depolarisation). Diagonalformen hos koherensmatrisen kan tolkas fysikaliskt som statistiskt oberoende mellan en uppsättning målvektorer. Metodiken ger en uppdelning i oberoende spridningsprocesser, vilket är det fundamentala med detta angreppssätt.

En motsvarande diagonalisering kan göras ett måls kovariansmatris, C_3 , definierad i (A.4.39). Man kan visa att den har *samma egenvärden* som T , och att egenvektorer mellan de båda matriserna kan uttryckas genom relativt enkla samband (Lee och Pottier, 2009, avsnitt 3.3.5).

Egenvärdena till koherensmatrisen (eller kovariansmatrisen) kan kombineras till en enda skalär, som är ett mått på den polarimetriska "oordningen" hos spridaren, d.v.s. hur stor del av den återspridda effekten som är opolariserad. Målets **entropi** definieras av (Cloude och Pottier, 1995, 1996)

$$H = \sum_{i=1}^n -P_i \log_n P_i, \quad (\text{A.6.4})$$

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (\text{A.6.5})$$

där n är den polarimetriska dimensionen, med $n=3$ i det monostatiska fallet, och $n=4$ i det bistatiska. Entropin H antar värden mellan 0 och 1.

Ett ytterlighetsfall utgörs av ett mål som inte depolariserar en infallande, fullständigt polariserad våg, d.v.s. en som inte åstadkommer någon opolariserad returkomponent. Detta fall motsvarar ett konstant mål med en (tidsberoende) spridningsmatris och en tillhörande målvektor. Detta innebär att utvecklingen av koherensmatrisen T enligt (A.6.3) bara har en term, endast ett egenvärde är skilt från noll. Entropin för detta mål är noll.

Det andra ytterlighetsfallet utgörs av ett fullständigt depolariserande mål, d.v.s. ett som ger en opolariserad retur, oberoende av den infallande vågens polarisation. För ett sådant mål är egenvärdena degenererade, d.v.s. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ och entropin är maximal, $H = 1$.

Verkliga spridare ligger mellan dessa båda ytterlighetsfall; entropin och den av egenvektorer bildade polarisationsbasen innehåller information om spridaren och kan användas för att klassificera den. Allmänt kan man säga (Cloude och Pottier, 1995) att låg entropi betyder förekomst av polariserad struktur hos spridaren. Man kan då vänta sig att möjligheten att extrahera spridningsparametrar är god. Däremot betyder en hög entropi att polarisation är en dålig klassificeringsdiskriminator.

Geofysiska medier, d.v.s. medier som i radarsystemsammanhang ofta betraktas som klotter, och där man finner olika typer av symmetrier och grad av oordning är väl lämpade för tillämpning av entropibegreppet för klassificering. För att nämna två exempel: havsytan uppvisar symmetri kring vindriktningen medan vegetationsskiktet för en skog består av löv, kvistar och grenar som är slumpmässigt fördelade i azimut (Nghiem m.fl., 1992).

Cloude har föreslagit ett klassifikationsschema för kvantitativ analys av polarimetriska SAR-data, som baserar sig på egenvärdesanalys av koherensmatrisen och där spridningsentropin är en nyckelparameter (Cloude, 1995; Cloude och Pottier, 1997; Cloude, 1997). Här skall endast de viktigaste begreppen och några resultat nämnas; för utförligare behandling hänvisas till originalartiklarna.

Den hermiteska koherensmatrisen kan enligt (A.6.3) delas upp i ett reellt egenvärdesspektrum och ortogonala egenvektorer, vilket kan skrivas

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}_3 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}_3^{-1}, \quad (\text{A.6.6})$$

där den unitära matrisen $\mathbf{U}_3$ utgörs av egenvektorer enligt (A.6.2). Dessa kan parametreras enligt följande

$$\mathbf{U}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \sin \alpha_1 \cos \beta_1 e^{i\delta_1} & \sin \alpha_2 \cos \beta_2 e^{i\delta_2} & \sin \alpha_3 \cos \beta_3 e^{i\delta_3} \\ \sin \alpha_1 \sin \beta_1 e^{i\gamma_1} & \sin \alpha_2 \sin \beta_2 e^{i\gamma_2} & \sin \alpha_3 \sin \beta_3 e^{i\gamma_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6.7})$$

Numreringen antas sådan att $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$. Genom att beakta egenvektorens egenskap att vara målvektorer, med komponenter som anger hur mycket karaktär av en viss elementarspridare ur Pauli-uppsättningen som ingår (se avsnitt A.4.5.1), kan man tolka vinklarna $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fysikaliskt på följande sätt:

α - Spridningens typ, $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$. $\alpha = 0$ ger enligt (A.6.7) bara den första komponenten i egenvektorn skild från noll (den första Paulimatrizen), vilket svarar mot en isotrop spridare (sfär) i geometrisk optik-approximationen. Då α växer, blir den spridande ytan anisotrop (d.v.s. $HH \neq VV$). Detta svarar mot ytspridning enligt fysikalisk optik. I extremfallet $\alpha = 45^\circ$ har vi en dipol för vilken endera HH eller VV är noll (vilken som är noll bestäms av β). Om $\alpha > 45^\circ$ har vi en anisotrop dieder (två dielektriska ytor), d.v.s. $HH \neq VV$, och fasskillnaden är 180° . I gränsen $\alpha = 90^\circ$ har vi uppnått den andra Paulimatrizen (och den tredje som bara skiljer sig från den andra genom en rotation). Detta svarar mot diederspridning från metalliska ytor. Även en helix representeras av detta α -värde. Man noterar att de båda grundläggande klasserna "udda" och "jämn", innefattas av α , som alltså är en mer generell klassningsparameter.

β - Målets orienteringsvinkel, $-180^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$,

δ - Fasen hos $(HH - VV)/(HH + VV)$,

γ - Fasen hos $HV/(HH + VV)$.

Måluppdelningen enligt (A.6.3) ger koherensmatrisen uttryckt som en summa av tre enskilda spridningsmekanismer. Vi kan definiera en medelspridningsmekanism $\bar{\alpha}$ och en medelorientering $\bar{\beta}$ enligt

$$\bar{\alpha} = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3, \quad (\text{A.6.8a})$$

$$\bar{\beta} = P_1 \beta_1 + P_2 \beta_2 + P_3 \beta_3, \quad (\text{A.6.8b})$$

där P_i ges av (A.6.5) och kan tolkas som sannolikheten att symbolen i uppträder. Motsvarande definitioner kan göras för de båda andra vinklarna δ, γ . Man kan sålunda

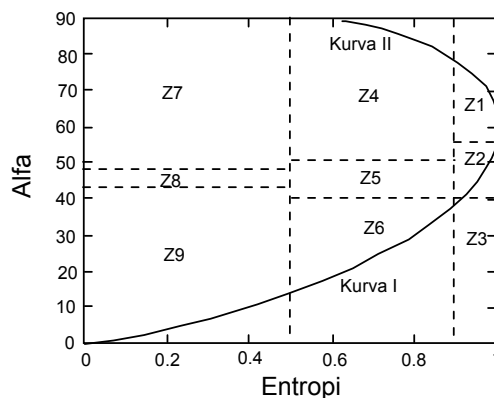
extrahera medelparametrar för att identifiera den dominerande spridningsmekanismen från koherensmatrisen och bilda en särdragsvektor $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}, \bar{\gamma}). \quad (\text{A.6.9})$$

Denna medelspridningsmekanism har en entropi eller osäkerhet H ($0 \leq H \leq 1$)

$$H = -P_1 \log_3 P_1 - P_2 \log_3 P_2 - P_3 \log_3 P_3. \quad (\text{A.6.10})$$

Cloude har tillämpat den skisserade metodiken på geofysiska, stokastiska medier. I det fallet är $\bar{\alpha}$ den viktigaste parametern för att identifiera den dominerande spridningsmekanismen och klassificeringen kan ske i en tvådimensionell $H - \bar{\alpha}$ klassificeringsrymd enligt Figur A.9. Alla stokastiska spridningsmekanismer kan representeras i denna rymd, men på grund av medelvärdesbildningen i (A.6.8a) är inte förekomsten lika tät i alla områden. Med ökande entropi minskar det möjliga intervallet för $\bar{\alpha}$ (Cloude och Pottier, 1997). $H - \bar{\alpha}$ -rummet kan delas in i ett antal zoner svarande mot klasser av olika spridningsmekanismer enligt Figur A.9 och Tabell A.6.2.

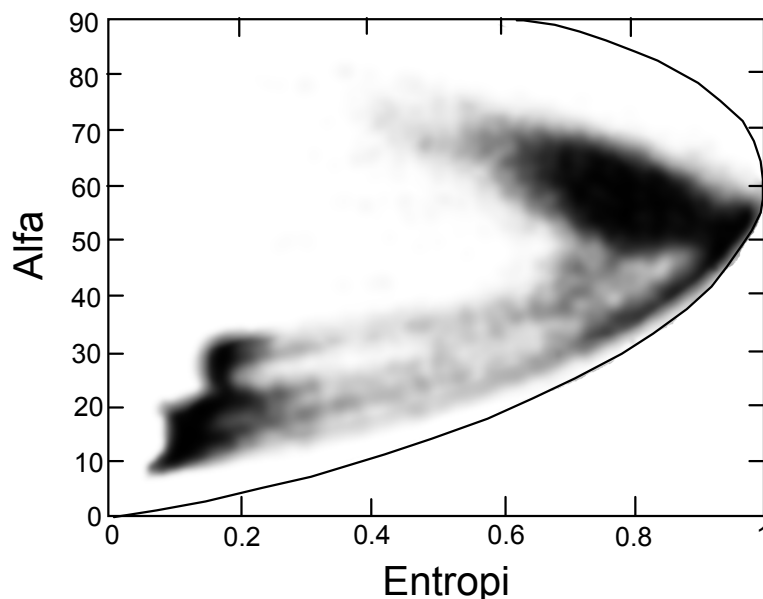


Figur A.9. Tvådimensionell klassificeringsrymd med nio zoner för spridning från stokastiska medier. Det möjliga området för $\bar{\alpha}$ ligger till vänster om de båda kurvorna ("Kurva I,II"). (Efter Cloude och Pottier, 1997, fig. 4).

Tabell A.6.2. Indelning av H (Entropi)- $\bar{\alpha}$ (Spridningsmekanism)-planet i nio zoner enligt Cloude och Pottier (1997).

Zon	Karaktäristik
9	Låg entropi, ytspridning
8	Låg entropi, dipolspridning; ex. vegetation med starkt korrelerad orientering av anisotropa spridare
7	Låg entropi, multipelspridning av diedertyp ("jämn")
6	Medelhög entropi, ytspridning
5	Medelhög entropi, vegetationsspridning av dipoltyp (anisotropa spridare med viss korrelation av orienteringarna)
4	Medelhög entropi, multipelspridning av diedertyp; ex. diederspridning från träd och mark, följd av utbredning genom ett vegetationsskikt.
3	Hög entropi, ytspridning; detta område ligger utanför de möjliga värdena i $H - \bar{\alpha}$ -planet, och kan inte användas för klassificering
2	Hög entropi, volymspridning
1	Hög entropi, multipelspridning av diedertyp; ex. spridning från vegetation med väl utvecklad gren och kronstruktur

Figur A.10 visar hur bildpunkterna hos en SAR-bild på L-band (NASA/JPL AIRSAR) av ett område kring San Franciscobukten fördelas i $H - \bar{\alpha}$ -planet.



Figur A.10. Fördelning i $H - \bar{\alpha}$ -planet av bildpunkterna hos en SAR-bild på L-band (NASA/JPL AIRSAR) av ett område kring San Franciscobukten. Mörkare gråskala betyder högre täthet. (Skiss efter Cloude och Pottier, 1997, Figur 8).

Klassificeringsparametrarna H och $\bar{\alpha}$ i Figur A.10 har bestämts ur egenvektorer och egenvärdena till koherensmatrisen. Lokala estimat av denna matris har erhållits genom medelvärdesbildning av målvektorn $\mathbf{T} = \langle \mathbf{k}\mathbf{k}^\dagger \rangle$ över ett antal bildelement (för att reducera fluktuationer). Målvektorn i sin tur har erhållits ur spridningsmatrisen (avsnitt 4.3), som utgör den primära mätstorheten. Scenen innehåller bl.a. urban bebyggelse, vegetation och vatten. Zon 9 innehåller en anhopning av havsytedata, medan de urbana zonerna ses som en grupp bildelement i övre högra delen i diagrammet. En bättre representation med färgkodning (visas inte här) visade att klassificeraren identifierade de viktigaste landskapsdetaljerna i scenen såsom havsytan, kustzonen, de urbana områdena (spridning av diedertyp med medelhög entropi) samt områdena med växtlighet, utgående från deras läge i $H - \bar{\alpha}$ -planet. Både H och $\bar{\alpha}$ behövs för korrekt klassificering; däremot behövs inte absolutkalibrerade data, eftersom båda storheterna är relativa egenvärdesmått. Det bör vidare betonas att inga träningsdata krävs - klassificeringen är ostyrd.

Den beskrivna metodiken illustrerar hur man för varje zon i en SAR-bild kan finna en spridningsmekanism som dominerar i medel. Klassificeringsparametrarna kan relateras direkt till fysikalisk struktur i de spridande objekten. Cloude och Pottier (1997) föreslår en användning av metoden för icke-styrd klassificering av polarimetriska flerfrekvens SAR-data i ett första steg, innan man försöker dra slutsatser om de spridande objektens natur med hjälp av modellbaserad metodik.

I detta sammanhang kan nämnas Rudolf och Siebers (1999) kvantifiering av den informationsökning, som kan erhållas vid användningen av ett flerpolarimetriskt radarsystem, jämfört med ett enkanaligt. Metoden kan användas för att värdera användningen av polarimetri på en insamlad datamängd, före en analys av polarimetriska data, vilket kan optimera analysen genom att icke nödvändiga steg utesluts.

A.6.3.1. Sammansatta, rörliga mål

Detta avsnitt avser att visa att rörliga, sammansatta mål kan uppvisa signaturer, som en enbart polarimetrisk radar kan feltolka vid tillämpning av den egenvektorbaserade metodiken, inkluderande målentropi, enligt föregående avsnitt. Korrekt tolkning kräver dopplerpolarimetri (Moisseev m.fl., 2001).

Vi skapar ett sammansatt mål som uppför sig som ett mål med slumpmässigt fördelad polarisation, men som fysiskt består av spridningscentra med väldefinierade polarimetriska egenskaper. Som kriterium på slumpmässighet använder vi målentropi, H , definierad i (A.6.4). Om målentropin är nära ett kan målets polarisation ses som slumpmässigt varierande, medan ett mål som är konstant i tiden har entropin noll. Antag att målet är sammansatt av två delar, en dieder och en sfär. Om vi låter diedern ha en maximal radarmålearea som är dubbelt så stor som sfärens, och låter den rotera kring siktlinjen till radarn kommer den resulterande radarmålearean att vara (jfr Tabell A.6.1)

$$\mathbf{S}_{\text{comp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + 2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ \sin \Omega t & -\cos \Omega t \end{pmatrix} e^{i\omega t}, \quad (\text{A.6.11})$$

där $\Omega/2$ är rotationsfrekvensen. Kovariansmatrisen för målet är

$$\mathbf{C}_{\text{comp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6.12})$$

Kovariansmatrisen är alltså diagonal; diagonalelementen utgör egenvärdena, som är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Man får enligt (A.6.4) att målentropin är $H=1$ och målet uppträder som fullständigt slumpmässigt polariserat, medan dess tidsberoende däremot enligt (A.6.11) är deterministiskt. Denna relation kan skrivas om,

$$\mathbf{S}_{\text{comp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega+\Omega)t} + \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega-\Omega)t}. \quad (\text{A.6.13})$$

Målet kan alltså delas upp i tre enkla radarmål: en sfär och två helixar (se Tabell A.6.1), med olika dopplerfrekvens. En dopplerpolarimetrisk radar ger en fullständig beskrivning av målet, vilket enbart polarimetri inte förmår.

A.6.4. Koherenta måluppdelningar

En tredje klass av måluppdelningsteorem är koherenta sådana, där målets spridningsmatris $\mathbf{S}$ skrivs som en komplex summa av basmatriser, t.ex. Pauli-matriserna, och där varje basmatris associeras med en elementär spridningsmekanism. Om vi tillämpar synsättet på Pauli-uppdelningen (A.4.16) av ett deterministiskt mål kan utvecklingen av spridningsmatrisen $\mathbf{S}$ ses som en koherent summa av spridningsmatriser hos fyra enkelspridare, där den första är en plan yta, den andra och tredje diedrar med orienteringen 45° relativt varandra och den sista en spridare som transformerar varje infallande polarisation till den ortogonala (Cloude och Pottier, 1996).

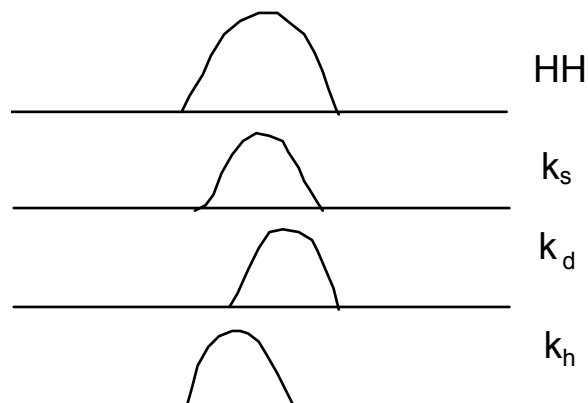
Ett exempel som kan hänföras till denna klass är Krogagers (1990) koherenta uppdelning av en spridningsmatris i tre delmatriser, med fysikalisk tolkning som spridning från dieder, sfär resp. helix:

$$\mathbf{S} = k_s \mathbf{S}_{\text{sfär}} + e^{j\phi} (k_d \mathbf{S}_{\text{dieder}} + k_h \mathbf{S}_{\text{helix}}). \quad (\text{A.6.14})$$

Även om den tredje delmatrisen förefaller något artificiell, kan den ges stöd av symmetribetraktelser (Cloude och Pottier, 1996); dessutom är den ekvivalent med spridningen från två diedrar med en relativ orienteringsvinkel av 45° och en förskjutning i avståndsled på en åttondels våglängd. Alternativt kan den också visas vara ekvivalent med två linjemål med viss relativ orientering och skillnad i avstånd. Därför kan matristypen förväntas förekomma i både urban miljö och terräng. Ett exempel på tolkning av SAR-bilder med denna metodik återfinns i Krogager (1992).

Vid bildalstrande radar kan man med hjälp av uppdelningen (A.6.14) skapa tre olika bilder över fördelningen av k_s, k_d resp. k_h , som representerar var sin spridningsmekanism. Detta ger inte bara en möjlighet att lösa upp olika spridningsmekanismer utan också att representera intensiteten hos spridarna korrekt jämfört med en bild som alstrats med en enda polarisationskanal. Detta ger en ökad effektiv upplösning - möjligheten att med hjälp av polarimetriska data separera spridare i en och samma upplösningcell. Ett exempel visas i Figur A.11 av "bilder" i en dimension, avståndsprofiler, av ett simulerat mål bestående av en sfär, en dieder och en helix. En traditionell HH-bild (överst) ger ingen separation av de tre

objekten, vilket k_s, k_d, k_h -profilerna ger. Resultatet bör inte bara kunna utnyttjas vid målklassificering; den förbättrade målinmätningen bör också kunna användas vid målföljning.



Figur A.11. Jämförelse mellan en traditionell HH-bild (avståndsprofil) och motsvarande profiler av k_s, k_d, k_h för ett simulerat mål bestående av en sfär, en dieder och en helix (skiss efter Krogager, 1990, fig. 2).

Koherent måluppdelning med fysikalisk tolkning har också tillämpats vid FOA för stridsvagnsmodellering på mm-våglängder (Kjellgren, Nilsson och Sume, 1992, 1993). Metodiken kan också ses som en modellbaserad analys av spridningen.

Referenser

Arfken, G.B., Weber, H.-J.: *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed., Academic Press, London, 1995.

Azzam, R.M.A., Bashara, N.M.: *Ellipsometry and Polarized Light*, North-Holland, 539 pp., paperback, 1987. ISBN 0 444 87016 4.

Balanis, C.: *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, New York, 1989.

Boerner, W.-M., Yan, W.-L., Xi, A.-Q., Yamaguchi, Y.: "On the basic principles of radar polarimetry: the target characteristic polarization state theory of Kennaugh, Huynen's polarization fork concept, and its extension to the partially polarized case", *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 10, pp. 1538-1550, October 1991.

Born, M., Wolf, E.: *Principles of Optics*, 7th (expanded) edition, Cambridge University Press, 952 pp, 1999. ISBN 0-521-64222-1.

Boti, M., Dussopt, L., Laheurte, J.-M.: "Circularly polarized antenna with switchable polarisation sense", *Electronics Letters*, vol. 36, no. 18, pp. 1518-1519, 31st August 2000.

Brosseau, C.: *Fundamentals of Polarized Light. A Statistical Optics Approach*, Wiley, 1998. ISBN 0-471-14302-2.

Burrows, C.R.: "Plane waves in dissipative media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-13, no. 5, September 1965.

Chang, P.C.Y., Walker, J.G., Hopcraft, K.I.: "Ray tracing in absorbing media", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, vol. 96, pp. 327-341, 2005.

Chaudhuri, S.K., Foo, B.-Y., Boerner, W. M.: "A Validation Analysis of Huynen's Target-Descriptor Interpretations of the Mueller Matrix Elements in Polarimetric Radar Returns Using Kennaugh's Physical Optics Impulse Response Formulation", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, s. 11-20, Jan. 1986.

Chen, H.C.: *Theory of Electromagnetic Waves. A CoordinateFree Approach*, McGraw-Hill, News York, 1983. ISBN 0-07-010688-6.

Cho, S. K.: *Electromagnetic Scattering*, Springer, New York, 389 s., 1990. ISBN 0-387-97380-X.

Cloude, S.R.: *Polarimetry: The Characterisation of Polarisation Effects in EM Scattering*, Ph.D. Thesis, University of Birmingham, 1986.

Cloude, S.R.: "Uniqueness of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry", i W.-M. Boerner m.fl. (red.), *Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry*, Part 1, s. 267-296, Dordrecht: Kluwer, 1992, 1938 s. ISBN 0-7923-1496-4.

Cloude, S.R.: "Symmetry, Zero Correlations and Target Decomposition Theorems", *Proceedings of the Third International Workshop on Radar Polarimetry, JIPR 95*, Nantes, 21-23 mars 1995, s. 58-68. Nantes: IRESTE, 1995. ISBN 2-909805-04-2.

Cloude, S.R.: "Wide Band Radar Inversion Studies Using the Entropy-Alpha Decomposition", i H. Mott, W.-M. Boerner (red.): *Wideband Interferometric Sensing and Imaging Polarimetry. Proceedings SPIE*, 28-29 July 1997, San Diego, vol. 3120, s. 118-129. Bellingham: SPIE, 1997. ISBN 0-8194-2542-7.

Cloude, S.R.: *Polarisation applications in remote sensing*, Oxford University Press, Oxford, 453 pp., 2010. ISBN 978-0-19-956973-1.

- Cloude, S.R., Pottier, E.: "Concept of polarization entropy in optical scattering", *Optical Engineering*, vol. 34, nr. 6, s. 1599-1610, juni 1995.
- Cloude, S.R., Pottier, E.: "A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. GES-34, s. 498-518, mars 1996.
- Cloude, S.R., Pottier, E.: "An Entropy Based Classification Scheme for Land Applications of Polarimetric SAR", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. GES-35, s. 68-78, jan. 1997.
- De Roo, R., Tai, C.-T.: "Plane wave reflection and refraction involving a finitely conducting medium", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 45, no. 5, pp. 54-61, October 2003.
- Dogaru, T., Le, C.: "Simulated radar range profiles of a simple room as computed by FDTD and Xpatch", Army Research Laboratory, Adelphi, MD, Technical Report ARL-TR-4420, April 2008. Downloaded from <http://www.arl.army.mil/> (visited 2009-11-08).
- Dogaru, T., Le, C.: "SAR images of rooms and buildings based on FDTD computer models", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 5, pp. 1388-1401, May 2009.
- Dogaru, T., Le, C., Kirose, G.: "Time-frequency analysis of a moving human Doppler signature", Army Research Laboratory, Adelphi, MD, Technical Report ARL-TR-4728, February 2009. Downloaded from <http://www.arl.army.mil/> (visited 2009-11-08).
- Dogaru, T., Nguyen, L., Le, C.: "Computer models of the human body signature for sensing through the wall radar application", Army Research Laboratory, Adelphi, MD, Technical Report ARL-TR-4290, September 2007. Downloaded from <http://www.arl.army.mil/> (visited 2009-11-08).
- Dupertuis, M.A., Proctor, M., Acklin, B.: "Generalization of complex Snell-Descartes and Fresnel laws", *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, no. 3, pp. 1159-1166, March 1994.
- Freeman, A., Durden, S.L.: "A three-component scattering model for polarimetric SAR data", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. GES-36, no. 3, pp. 963-973, May 1998.
- Gao, S., Sambell, A., Zhong, S.S.: "Polarization-agile antennas", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 48, no. 3, pp. 28-37, June 2006.
- Guissard, A.: "Mueller and Kennaugh matrices in radar polarimetry", *IEEE Transactions in Geoscience and Remote Sensing*, vol. 32, no. 3, pp. 590-597, May 1994.
- Horn, R.A., Johnson, Ch.A.: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. ISBN 0-521-38632-2.
- Huynen, J.R.: "Phenomenological theory of radar targets", Chapter 11 in *Electromagnetic Scattering*, ed. P.L.E. Uslenghi, New York, Academic Press, 1978.
- Huynen, J.R.: "Towards a Theory of Perception for Radar Targets", i W.-M. Boerner (red.), *Inverse Methods in Electromagnetic Imaging*. Part 2, s. 797-822, Reidel 1985.
- Huynen, R.: *Phenomenological Theory of Radar Targets*, Ph.D. Thesis, Delft Technical University, Rotterdam, Drukkerij Bronder Offset N.V., 1970. First Revision: P.Q. Research, Los Altos Hills, 1987.

- Huynen, J.R.: "Some Comments on Parameter Interpretation in Radar Target Polarimetry", *Proceedings of the Third International Workshop on Radar Polarimetry, JIPR 95*, Nantes, 21-23 mars 1995, s. 50-57. Nantes: IRESTE, 1995. ISBN 2-909805-04-2.
- Jackson, J.D.: *Classical Electrodynamics*, Wiley, 3rd ed., New York, 1999. ISBN 0-471-30932-X.
- Jansen, C., Piesiewicz, R., Mittleman, D., Kurner, T., Koch, M., "The impact of reflections from stratified building materials on the wave propagation in future indoor terahertz communication systems", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 5, May 2008.
- Johansson, C., Sume, A.: "Polarimetrisk kalibrering av koherent radar med tillämpning vid 94 GHz", FOI-R--0161--SE, Metodrapport, FOI Informationssystem, Linköping, augusti 2001.
- Kennaugh, E.M.: *Polarization Properties of Radar Reflections*, M.Sc. Thesis, Dept. of Elec. Engineering, The Ohio State University, Columbus, 1952.
- Kingsley, S., Quegan, S.: *Understanding Radar Systems*, McGraw-Hill, London, 1992. ISBN 0-07-707426-2.
- Kjellgren, J., Nilsson, S., Sume, A.: "A Polarimetric Radar Model for Tank Targets at Millimetre Wavelengths", *Proceedings of the Second International Workshop on Radar Polarimetry, JIPR 92*, Nantes, 8-10 sept. 1992, s. 138-148. Nantes: IRESTE, 1992. ISBN 2-909805-01-8.
- Kjellgren, J., Nilsson, S., Sume, A.: "A Simple Reflector Model for Polarimetric Radar at Millimetre Waves", *International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS' 93)*, Kogaku University, Tokyo, Japan, 18-21 aug. 1993, s. 2037-2039. Piscataway: IEEE, 1993. ISBN 0-7803-1240-6.
- Kong, J.A.: *Electromagnetic Wave Theory*, Wiley, New York, 1986. ISBN 0-471-63389-5.
- Kozlov, A.I.: "Radar contrast of two objects", *Izvestiya VUZ. Radioelektronika*, vol. 22, no. 7, pp. 63-67, 1979.
- Kristensson, G.: *Elektromagnetisk vågutbredning*, Studentlitteratur, Lund, 1999. ISBN 91-44-01202-0.
- Krogager, E.: "New decomposition of the radar target scattering matrix", *Electronic Letters*, vol. 26, nr. 18, 30 aug. 1990.
- Krogager, E.: "Decomposition of the Sinclair matrix into fundamental components with application to high resolution radar target imaging", i W.-M. Boerner m.fl. (red.), *Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry*, Part 2, s. 1459-1478, Dordrecht: Kluwer, 1992. ISBN 0-7923-1497-2.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, Oxford, 402 s., 1975. ISBN 0-08-018176-7.
- Le, C., Dogaru, T., Nguyen, L., Ressler, M.A.: "Ultrawideband (UWB) radar imaging of building interior: measurements and predictions", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 5, pp. 1409-1420, May 2009.
- Lee, J.-S., Pottier, E.: *Polarimetric Radar Imaging. From Basics to Applications*, CRC Press, 398 pp., 2009. ISBN 978-1-4200-5497-2.

Leung, P.T., Chen, C.W., Chiang, H.-P.: "Large negative Goos-Hanchen shift at metal surfaces", *Optics Communications*, vol. 276, pp. 206-208, 2007.

Lüneburg, E.: "Principles of Radar Polarimetry", *IEICE Trans. Electron.*, vol. E78-C, no. 10, pp. 1339-1345, Oct. 1995.

Lüneburg, E.: "Radar polarimetry: a revision of basic concepts", in *Direct and inverse electromagnetic scattering*, ed. A.H. Serbest and S.R. Cloude, pp. 257-275, Longman, 1996.

Lüneburg, E., Ziegler, V., Schroth, A., Tragl, K.: "Polarimetric Covariance Matrix Analysis of Random Radar Targets", *Target and Clutter Scattering and their Effects on Military Radar Performance*, AGARD CP-501, 1991. ISBN 92-835-0633-2.

McDonough, R.N., Whalen, A.D.: *Detection of Signals in Noise*, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1995. ISBN 0-12-744852-7.

Moisseev, D., Unal, C., Russchenberg, H., Ligthart, L.: "Doppler polarimetric ground clutter identification and suppression for atmospheric radars based on co-polar correlation", *XIIIth International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications*, (MIKON-2000), Wroclaw, Poland, May 22-24, *Proceedings*, vol. 1, pp. 94-97, 2000.

Moisseev, D., Unal, C., Russchenberg, H., Ligthart, L.: "Target-to-clutter contrast enhancement using radar Doppler polarimetry", *Proc. of the 2001 IEEE Radar Conference*, Atlanta 1-3 May, pp. 321-325, IEEE, ISBN 0-7803-6707-3, 2001.

Moisseev, D., Unal, C., Russchenberg, H., Ligthart, L.: "A new method to separate ground clutter and atmospheric reflections in the case of similar Doppler velocities", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 40, no. 2, pp. 239-246, February 2002.

Moisseev, D.N.: *Contrast enhancement for depolarizing radar targets*, Doctoral Thesis, Technische Univ. Delft (Netherlands), 130 pp., 2002. ISBN 90-77017-64-X. Downloaded from <http://repository.tudelft.nl/> (Visited 2009-08-06).

Molinet, F.A.: "The Stokes Matrix Parameters and Their Physical Interpretation by the Geometrical Theory of Diffraction", *Proceedings of the Seventh International Conference on Antennas and Propagation*, Part 1, s. 262-264, 1991.

Mott, H.: *Remote Sensing with Polarimetric Radar*, Wiley Interscience, 309 pp., 2007. ISBN 0-470-07476-0.

Nghiem, S.V., Yueh, S.H., Kwok, R., Li, F.K.: "Symmetry properties in polarimetric remote sensing", *Radio Science*, vol. 27, nr 5, s. 693-711, Sept.-Oct. 1992.

Nguyen, D.B., Strohbehn, J.W.: "The polarization of a complex vector in higher dimensions", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 4, pp. 555-556, April 1991.

Orfanidis, S.J.: *Electromagnetic Waves and Antennas*, Freely available at www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa, 2003.

Papoulis, A.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1991. ISBN 0-07-100870-5.

Perina, J.: *Coherence of Light*, 2nd completely revised edition, Reidel, 350 pp., 1985, ISBN 90-277-2004-5.

Poelman, A.J.: "Virtual polarization adaption. A method of increasing the detection capability of a radar system through polarization-vector processing", *IEE Proceedings-F*, vol. 128, no. 5, pp. 261-270, October 1981.

Pottier, E.: "On Dr J.R. Huynen's main contribution in the development of polarimetric radar techniques", *Proceedings of the Second International Workshop on Radar Polarimetry, JIPR 92*, Nantes, 8-10 Sept. 1992, s. 2-14. Nantes: IRESTE, 1992. ISBN 2-909805-01-8.

Priestley, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, London, 1981.

Raney, R.K.: "Hybrid-polarity SAR architecture", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 11, pp. 3397-3404, November 2007.

Raney, R.K.: "Hybrid-Quad-Pol SAR", *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS 2008*, 7-11 July, Boston, Proceedings, pp. IV-491 - - IV-493, 2008.

Raney, R.K.: "Hybrid-polarity SAR architecture", *Proc. SPIE* vol. 7308, *Radar Sensor Technology XIII*, pp. 730802-1--8, 2009.

Rowe, M.P., Pugh, E.N., Tyo, J.S., Engheta, N.: "Polarization-difference imaging: a biologically inspired technique for observation through scattering media", *Optics Letters*, vol. 20, no. 6, pp. 608-610, March 15, 1995.

Rudolf, H., Sieber, A.J.: "Increase of information by polarimetric remote sensing", *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS 1999*, Hamburg, 28 June – 2 July, Proceedings, vol. 4, pp. 1992-1994, 1999.

Sadjadi, F.A., Chun, C.S.L., Sullivan, A., Gaunard, G.C.: "Buried object characterization via ground-penetrating radar and Huynen polarimetric parameters", *Optical Engineering*, vol. 44, no. 12, pp. 126201-1 – 15, 2005.

Schmieder, R.W.: "Stokes-algebra formalism", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 59, no. 3, pp. 297-302, March 1969.

Searle, S.R.: *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York, 1982.

Sommerfeld, A.: *Optik*, 2. Auflage, Bearbeitet und ergänzt von F. Bopp und J. Meixner, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1959.

Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, 1988. ISBN 0-15-551005-3.

Stratton, J.A.: *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

Sullivan, R.J.: *Radar Foundations for Imaging and Advanced Concepts*, SciTech Publishing, Raleigh, 2003.

Sume, A.: "Radarreturen från ett system av diskreta reflektorer". FOA Rapport A 30064-3.3, Linköping, Aug. 1992.

Sume, A.: "Antennöversikt för 'se-igenom-vägg'-tillämpningar", FOI Memo 2227, november 2007.

Sume, A., Eriksson, M.: "Polarimetric characterisation of radar targets", *Radiovetenskap och Kommunikation 96 (RVK 96)*, Luleå, juni 1996, Tekniska Högskolan i Luleå, s. 350-354, 1996. ISBN 91-630-4455-2.

Sume, A., Gustafsson, M., Jänis, A., Nilsson, S., Rahm, J., Örbom, A.: "Radar detection of moving objects around corners", *Proc. SPIE* vol. 7308, *Radar Sensor Technology XIII*, pp. 73080V-1--18, 2009.

Sume, A., Nilsson, S.: "Fenomenologisk beskrivning av väggpenetrerande radar", FOI-R--2635--SE, Teknisk Rapport, FOI Informationssystem, Linköping, december 2008.

Sume, A., Nilsson, S., Rahm, J., Örbom, A.: "Radarmätningar med realistisk väggtyp för verifiering av se-runt-hörn-principen", FOI-R--2688--SE, Teknisk Rapport, FOI Informationssystem, Linköping, december 2008.

Tokumaru, S.: "Polarization structure of geometrical-optics field in absorbing media", *Electronics and Communication in Japan*, Part 2, vol. 80, no. 1, pp. 1-10, January 1997.

Tyo, J.S.: "Optimum linear combination strategy for an N -channel polarization-sensitive imaging or vision system", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, no. 2, pp. 359-366, February 1998.

Tyo, J.S., Rowe, M.P., Pugh, E.N., Engheta, N.: "Target detection in optically scattering media by polarization-difference imaging", *Applied Optics*, vol. 35, no. 11, pp. 1855-1870, 10 April 1996.

Ulabay, F.T., Elachi C.: *Radar polarimetry for geoscience applications*, Artech House, Norwood, 1990.

Webb, A.: *Statistical Pattern Recognition*, 2nd ed., Wiley, 2002. ISBN 0-470-84513-9.

Wehner, R.: "Polarization vision – a uniform sensory capacity?", *Journal of Experimental Biology*, vol. 204, pp. 2589-2596, 2001.

Whitaker, M.A.B.: "Improved treatment of Fresnel equations", *Journal of Physics A, Mathematical and General*, vol. 12, no. 3, pp. 297-307, March 1979.

Yang, J., Dong, G., Peng, Y., Yamaguchi, Y., Yamada, H.: "Generalized optimization of polarimetric contrast enhancement", *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 1, no. 3, pp. 171-174, July 2004.

Yang, J., Peng, Y.-N., Lin, S.-M.: "Similarity between two scattering matrices", *Electronics Letters*, vol. 37, no. 3, pp. 193-194, 1st February 2001.

Yang, J., Peng, Y.-N., Yamaguchi, Y., Yamada, H., Boerner, W.-M.: "The periodicity of the scattering matrix and its application", *IEICE Trans. Commun.*, vol. E85-B, no. 2, pp. 565-567, February 2002.

Yemelyanov, K.M., Engheta, N., Hoorfar, A., McVay, J.A.: "Adaptive polarization contrast techniques for through-wall microwave imaging applications", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 5, pp. 1362-1374, May 2009.

Yemelyanov, K.M., Lin, S.-S., Pugh, E.N., Engheta, N.: "Adaptive algorithms for two-channel polarization sensing under various polarization statistics with nonuniform distributions", *Applied Optics*, vol. 45, no. 22, pp. 5504-5520, 1 August 2006.

Yemelyanov, K.M., McVay, J.A., Engheta, N., Hoorfar, A.: "Adaptive polarization-difference imaging algorithms for through-the-wall microwave imaging scenarios", *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, July 3-6, Washington DC, Proceedings, 2005. Downloaded from <http://www.em-research.com/papers/aps05-adpi.pdf> (visited 23 June 2009).