

JANNE ÅKERSTRÖM

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
α	C_x	$-C_y d_y$	0	-1	0	0	0	1	
β	0	C_y	$-d_y$	0	-1	0	0	ψ	
γ	0	0	C_z	0	0	-1	0	ψ	
$-C_0$	$-d_x$	$-d_y$	$-d_z$	0	0	0	1	0	

$d_x = 0,041$	$C_x = 0,25$ alt. 0,214	$\psi = 4$ alt 1.
$d_y = 0,038$	$C_y = 0,125$ alt. 0,098	
$d_z = 0,043$	$C_z = 0,125$ alt. 0,039	

Version 1:

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
* α	0,25	-0,163	0	-1	0	0	0	1	4 $\cdot R_1$
* β	0	0,125	-0,038	0	-1	0	0	4	$\downarrow$ -
* γ	0	0	0,125	0	0	-1	0	4	$\downarrow$ -
$-C_0$	0,041	0,038	0,043	0	0	0	1	0	$R_4 - 0,164 R_1$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
x	1	-0,65	0	-4	0	0	0	4	$\downarrow R_1 + 5,2 \cdot R_2$
* β	0	0,125	-0,038	0	-1	0	0	4	0,5 $R_2 \cdot 8$
* γ	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0	-1	0	4	$\downarrow$ -
$-C_0$	0	0,065	0,043	0,164	0	0	1	-0,164	$R_4 - 0,52 R_2$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
x	1	0	-0,187	-4	-5,2	0	0	24,8	$\frac{125}{25} R_1 + 1,58 R_3$
y	0	1	-0,304	0	-8	0	0	32	$\frac{108}{26} R_2 + 2,43 R_3$
* γ	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0	-1	0	4	32 $R_3 \cdot 8$
$-C_0$	0	0	0,0628	0,164	0,52	0	1	-2,24	$R_4 - 0,502 R_3$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV
x	1	0	0	-4	-5,2	-8	0	31,12
y	0	1	0	0	-8	-3,43	0	41,72
z	0	0	1	0	0	-8	0	32
$-C_0$	0	0	0	0,164	0,52	0,502	1	4,25

 $\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 4,25 \\ x = 31 \\ y = 42 \\ z = 32 \end{cases}$

FOI är en huvudsakligen uppdragsfinansierad myndighet under Försvarsdepartementet. Kärnverksamheten är forskning, metod- och teknikutveckling till nytta för försvar och säkerhet. Organisationen har cirka 1000 anställda varav ungefär 800 är forskare. Detta gör organisationen till Sveriges största forskningsinstitut. FOI ger kunderna tillgång till ledande expertis inom ett stort antal tillämpningsområden såsom säkerhetspolitiska studier och analyser inom försvar och säkerhet, bedömning av olika typer av hot, system för ledning och hantering av kriser, skydd mot och hantering av farliga ämnen, IT-säkerhet och nya sensorers möjligheter.



FOI
Totalförsvarets forskningsinstitut
164 90 Stockholm

Tel: 08-55 50 30 00
Fax: 08-55 50 31 00

www.foi.se

Janne Åkerström

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
α	c_x	$-c_y d_y$	0	-1	0	0	0	1	
β	0	$c_y - d_y$	0	-1	0	0	0	ψ	
γ	0	0	c_z	0	0	-1	0	ψ	
$-C_0$	$-d_x$	$-d_y$	$-d_z$	0	0	0	1	0	

$d_x = 0,041$	$c_x = 0,25$	alt. 0,214	$\psi = 4$ alt 1.
$d_y = 0,038$	$c_y = 0,125$	alt. 0,098	
$d_z = 0,043$	$c_z = 0,125$	alt. 0,039	

Version 1:

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
* α	0,25	-0,163	0	-1	0	0	0	1	4 $\cdot R_1$
* β	0	0,125	-0,038	0	-1	0	0	4	$\frac{1}{4}$ -
* γ	0	0	0,125	0	0	-1	0	4	$\frac{1}{4}$ -
$-C_0$	0,041	0,038	0,043	0	0	0	1	0	$R_4 - 0,164 R_1$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
x	1	-0,35	0	-4	0	0	0	4	$\frac{1}{4}$ $R_1 + 5,2 \cdot R_2$
* β	0	0,125	-0,038	0	-1	0	0	4	0,5 $R_2 - 8$
* γ	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0	-1	0	4	$\frac{1}{8}$ -
$-C_0$	0	0,065	0,043	0,164	0	0	1	-0,164	$R_4 - 0,52 R_2$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV	Test
x	1	0	-0,88	-4	-5,2	0	0	24,8	$\frac{12,5}{2,5}$ $R_1 + 1,58 R_3$
y	0	1	-0,304	0	-8	0	0	32	$\frac{108,26}{2,5}$ $R_2 + 2,43 R_3$
* γ	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0	-1	0	4	32 $R_3 \cdot 8$
$-C_0$	0	0	0,0628	0,164	0,52	0	1	-2,24	$R_4 - 0,502 R_3$

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	SV
x	1	0	0	-4	-5,2	-8	0	31,12
y	0	1	0	0	-8	-2,43	0	41,72
z	0	0	1	0	0	-8	0	32
$-C_0$	0	0	0	0,164	0,52	0,502	1	4,25

$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 4,25 \\ x = 31 \\ y = 42 \\ z = 32 \end{cases}$

MODELLER OCH OPTIMERINGSMETODER FÖR PERSONALFLÖDESANALYSER

Titel	Modeller och metoder för personalflödesanalyser
Title	Modeling personnel flows in the SWAF
Rapportnr/Report no	FOI-R--3648- -SE
Månad/Month	Mars/March
Utgivningsår/Year	2013
Antal sidor/Pages	45 p
ISSN	1650-1942
Kund/Customer	Försvarsmakten / Swedish Armed Forces
Forskningsområde	Modellering och simulering
FoT område	
Projektnr/Project no	E113311
Godkänd av/Approved by	Krister Pallin
Ansvarig avdelning	Försvarsanalys / Defence Analysis

Detta verk är skyddat enligt lagen (1960:729) om upphovsrätt till litterära och konstnärliga verk.
All form av kopiering, översättning eller bearbetning utan medgivande är förbjuden.

This work is protected under the Act on Copyright in Literary and Artistic Works (SFS 1960:729).
Any form of reproduction, translation or modification without permission is prohibited.

Sammanfattning

I föreliggande rapport presenteras en matematisk modell, byggd på linjär programmering, för flöden av officerare inom Försvarsmakten. Den modellerar och ger möjlighet att optimera flödet mellan kategorier och inflödet av officerare inom hela Försvarsmakten, men kan även (vilket också visas) skalas ner till att endast beröra ett förband eller en vapengren.

I rapporten ges också förslag på hur modellen kan användas samt förslag på hur man kan skatta de värden som skall matas in i modellen.

Eftersom det under arbetet visade sig nödvändigt att modellera även avgångar ur Försvarsmakten presenteras också en modell för pensionsavgångar bland officerare.

Nyckelord:

Försvarsmakten, officerare, rekrytering, inflöde, utflöde, linjär programmering

Summary

Using linear programming, the intake and outflow of officers in the Swedish Armed Forces is modeled. The model is used to optimize the size of the intake, promotion and volume of officers. The focus lies on the entire SWAF, but the model might also be used to study a service branch or smaller military unit.

Suggestions on how to estimate the variables needed in the model are given.

During the work the need to model the outflow of officers caused by retirement arose. Because of this, a model for tracking the retirement of officers is also included.

Keywords: Swedish Armed Forces, officers, recruitment, inflow, outflow, linear programming

Innehållsförteckning

1	Inledning	7
1.1	Syfte	7
1.2	Läsanvisning	8
1.3	Allmänt om linjär programmering	8
1.4	Varför linjär programmering?	9
1.5	Sammanfattning	9
2	Personalflödesmodell	11
3	Förslag på skattningar av de parametrar som ingår i modellen	13
3.1.1	Antalet i varje kategori	13
3.1.2	Tid innan befordran	13
3.1.3	Avgångar	13
4	Modellens tillämplighet med korta exempel	15
4.1.1	Personalvolym	15
4.1.2	Befordringstakt	16
4.1.3	Avgångar	16
4.1.4	Pensionsavgångar	17
4.1.5	Avslutande ord	17
5	Fortsatt arbete	18
6	Appendix 1: Flödesmodell	19
6.1.1	Enkel modell	19
6.1.2	Modell med avgångar	19
6.1.3	Modell för ett förband	22
7	Appendix 2: Modell för pensionsavgångar	24
8	Appendix 3: Genomräknade exempel	29
8.1.1	Exempel 1: Modell för ett förband	29
8.1.2	Exempel 2: Åter till tablå 1	30
8.1.3	Exempel 3: LEDS/PERSS personalramar och tablå 1	31
8.1.4	Exempel 4: Tablå 1 och LEDS/PERSS ramar fortsatt	32
8.1.5	Exempel 5: När vi vet kategoriernas storlek och avgångsfrekvens	33
8.1.6	Exempel 6: Tillbaka till tablå 2	34
8.1.7	Exempel 7: Pensionsavgångar inom kategorier	35
9	Appendix 4: Lösningstablåer till exempel	37

Författarens förord:

Inom ramen för mitt arbete som operationsanalytiker vid personalstaben på Försvarmaktens högkvarter kom jag i kontakt med personalprognoser i ett tioårsperspektiv under hösten 2011.

Där bedrivs ett arbete där man försöker balansera in- och utflöde av officerare, både i syfte att ta fram men även att hålla framtagna planer för personalstyrkan.

Arbetet baserades på en modell som tog hänsyn till kopplingar mellan olika kategorier och olika avgångsorsaker.

Under tiden som jag deltog i arbetet med denna modell drog jag mig till minnes en optimeringsmetod jag använt under min tid som matematikstudent vars förutsättningar starkt påminde om modellen för personalflöden vi arbetade med. Jag blev nyfiken på om det gick att använda denna metod för frågeställningen och började skissa på hur detta kunde göras. Jag tyckte, och tycker än, också att en så pass viktig fråga som denna förtjänade att sättas i en genomräknad matematisk kontext.

Resultatet av mitt arbete presenteras i denna rapport.

Jag vill passa på att tacka min granskare, Frank Steder vid FFI i Norge för hans synpunkter och idéer som varit till stor hjälp, mina projektledare vid PERSS OA som låtit mig arbeta med detta när jag haft någon timme över samt chefen för PERSS PLAN, Matthias Landström, som med sin tilltro till modellen och frågor om när den är klar drivit arbetet framåt.

Janne Åkerström

Kista, mars 2013

1 Inledning

För att Försvarsmakten långsiktigt skall kunna lösa de uppgifter som myndigheten är ålagd att göra krävs en över tid tillräckligt stor personalstyrka. Det är, med långsiktigheten i åtanke, viktigt att Försvarsmakten inte bara för stunden fyller sina numerära behov, utan även ger sig själv förutsättningar att göra så på lång sikt.

Försvarsmakten delar in sina anställda i kategorier som baserar sig på komplexiteten i arbetsuppgifterna. För officerare är indelningen i stort sett identisk med indelningen i grader. Då det praktiskt är så att officerare endast kan röra sig uppåt, dvs. bli beförade eller stanna kvar i samma kategori så kan flödet av officerare enkelt modelleras matematiskt, med hjälp av linjär programmering.

Ett flöde som kan modelleras kan också, i de flesta fall, optimeras, det vill säga det system som används kan fås att prestera på bästa sätt.

I föreliggande rapport kommer vi att presentera en matematisk modell för flöden av officerare inom Försvarsmakten. Den modellerar och ger möjlighet att optimera flödet mellan kategorier och inflödet av officerare inom hela Försvarsmakten, men kan även (vilket också visas) skalas ner till att endast beröra ett förband eller en vapengren.

Som ett led i utvecklingen av den nämnda flödesmodellen uppstod behovet att identifiera avgångsfrekvenser. Avgång på grund av pension visade sig vara den svåraste variabeln att skatta då pensionsavgångar inträffar oregelbundet. Därför utvecklades även en matematisk modell som följer en antagningskull officerare genom karriären. Den kan användas för att beräkna framtida pensionsavgångar givet ett visst intag, men kan exempelvis också användas för att studera effekterna av ökad beföringstakt. Denna modell kräver dock inte att en antagningskull används som utgångsvärde och kan följaktligen även appliceras på en idag anställd grupp officerare.

Eftersom arbetet som ligger till grund för denna rapport är finansierad av Försvarsmakten ligger rapportens fokus på att hantera Försvarsmaktens personalsituation. De föreslagna modellerna är dock applicerbara för alla organisationer vars personalbefordran styrs av samma principer som de för Försvarsmaktens officerare, det vill säga att rekrytering till högre kategorier sker (endast) från kategorien närmast under och inflöde sker endast till den lägsta kategorien. De i rapporten föreslagna modellerna är alltså tillämpbara även utanför Försvarsmakten.

1.1 Syfte

Arbetet som ligger till grund för denna rapport syftar till att ta fram en matematisk modell för flödet av officerare i Försvarsmakten, som kan användas för att optimera intag och karriärgång.

1.2 Läsanvisning

Rapporten är tudelad. I den huvudsakliga rapporten redogörs kort om vad linjär programmering är och varför det kan användas för att studera inflöden och flöden mellan personalkategorier (sidan 8). Sedan presenteras i korta drag hur officersflödena har modellerats (kapitlet Personalflödesmodell), vilket indata som krävs för att använda modellen samt vilka svar som dess användande kan ge. Förslag på hur, av modellen, krävda indata kan uppskattas presenteras på sidan 13. Förslag på hur modellen skulle kunna utvecklas och användas praktiskt ges i kapitlet Fortsatt arbete.

För att testa tillämpligheten i modellen samt visa på möjliga resultat som kan fås då den används använder vi modellen och de föreslagna sätten att skatta variabler räknar vi en del exempel. Dessa sammanfattas i kapitel 4, hur beräkningar gjorts och mer detaljerade resultat ges i Appendix 3.

Den andra delen av rapporten visar hur den föreslagna modellen är konstruerad rent tekniskt och ger exempel på praktisk användning av modellen. I Appendix 1: Flödesmodell beskrivs i detalj hur modellen är uppbyggd. I Appendix 2: Modell för pensionsavgångar, beskrivs hur det tillstötande problemet med pensionsavgångar kan modelleras och beräknas. I Appendix 3: Genomräknade exempel kan den som så önskar se vilka resultat som fås när modellen används med hjälp av värden som skattas genom i rapporten föreslagen metod. I Appendix 4 återfinns de exakta uträkningarna för exemplen i Appendix 3.

1.3 Allmänt om linjär programmering

Ett linjärt programmeringsproblem karaktäriseras av att den funktion som skall optimeras (det vill säga minimeras eller maximeras) är linjär och skall optimeras i ett begränsat område i $\mathbf{R}^n$. I den i rapporten föreslagna optimeringsmetoden låter vi antalet officerskategorier vara dimensionerande, det vill säga $n = 5$. I sammanhanget kan nämnas att den svenska benämningen är något vilseledande, programmering är taget av engelskans *programming*, i betydelsen planering och kommer från att många planeringsproblem, överförda till matematisk form, ser ut just på detta vis.

Långt ifrån alla planeringsproblem tar sig dock formen av LP-problem. Dessutom krävs, för en överföring av ett planeringsproblem till matematisk form, ett visst mått av idealiserande av verkligheten. Detta inses bland annat då officerare, som av uppenbara skäl måste anses vara fördelade i $\mathbf{N}$, beskrivs i $\mathbf{R}$.¹ Som alla teoretiska modeller kan alltså inte de modeller som föreslås i denna rapport appliceras rakt av utan en förståelse för de verkliga förhållandena.

Den modell för personalflöden som vi presenterar förutsätter vidare att vi har en så pass stor massa av officerare att vi kan betrakta dem som utbytbara mot varandra (inom kategorierna). Modellen bör därför främst användas till att rimlighetspröva långsiktigare planering.

¹ $\mathbf{N}$ är de naturliga talen $[0, 1, 2, 3, 4 \dots]$ och $\mathbf{R}$ är de reella talen

1.4 Varför linjär programmering?

För varje nytt sätt att framställa en planeringssituation upptäcks nya problematiska drag i den struktur man planerar för och med dessa problem nya lösningar och förbättringar för strukturen.

Försvarsmakten har idag flera metoder för personalplanering och fler är under utveckling. Bland de som redan idag finns kan nämnas PG BoK², som sorterar alla befintliga befattningar efter kompetensnivåer; IP Prio³ som kan användas på enhetsnivå (t.ex. ett förband) för att göra en relativt långsiktig planering av befintlig personal samt den excelmodell över Försvarsmaktens flöden som inspirerade till arbetet som presenteras i denna rapport. Under utveckling är HuMaST⁴, ett avancerat simuleringsverktyg baserat på stokastiska modeller.

Man kan alltså ifrågasätta varför ännu en modell för personalflöden behöver tas fram.

Alla de nämnda modellerna och metoderna är viktiga och behövs för olika områden inom Försvarsmaktens personalplanering. Ingen av de befintliga modellerna är dock heltäckande och har svagheter eller områden de inte täcker. Som exempel kan nämnas att PG BoK endast studerar befattningsbenämningar och inte kan hantera flöden alls. IP Prio å sin sida används endast på enhetsnivå och kan alltså inte ge en helhetsbild. HuMaST har förmågan att hantera kompetenser och ge en helhetsbild av Försvarsmakten, men kräver ett mycket stort dataunderlag, det tar tid att genomföra en simulering och dessutom kan olika frågeställningar kräva olika versioner av HuMaST.

Fördelarna med att modellera officerare med linjär programmering är flera. Det är ett relativt snabbt sätt att få en överblick över hela officerskåren både idag och i framtiden. Att metoden är snabb i sin användning gör att den lämpar sig väl för att användas interaktivt. Modellen kan t.ex. användas under ett möte för att snabbt realiserbarhetspröva ett förslag till personalstruktur.

Kanske allra viktigast är att genom den framställning som kan göras när officersflöden ses som ett linjärt programmeringsproblem så synliggörs problem i strukturen som inte hade upptäckts annars.

Ytterligare en fördel med den framställning som linjärt programmeringsproblem som görs är att framställningen är allmängiltig så länge de två grundkraven i modellen är uppfyllda. Metoden som föreslås kan alltså användas för fler kategorier än bara officerare.

1.5 Sammanfattning

I föreliggande rapport föreslår vi hur flödet av officerare inom Försvarsmakten kan modelleras matematiskt. Modellerna baserar sig på att officerare vid varje givet tidssteg, i rapporten satt som helt år, kan befordras, kvarstanna i nivå eller lämna Försvarsmakten. Eftersom beslutet att lämna Försvarsmakten kan vara frivilligt eller ofrivilligt och ibland inte ens ett beslut, indelar vi avgångar i

² ProjektGrupp Befattningsstruktur och Kravsättning

³ Försvarsmaktens SAP-system

⁴ Human Management Simulation Tool

flera delar men betraktar dem i flödesmodellen som en variabel. Vi utvecklar även en modell för framtida pensionsavgångar, för att bättre kunna utreda avgångsvariabelns ingående delar.

Numerären officerare i olika kategorier begränsas av dels de personalramar som Försvarsmakten beslutar och dels av möjligheten att personalförsörja högre nivåer från lägre, vilket båda i en matematisk mening är linjära begränsningar. Därmed kan officersflödet modelleras på ett sådant sätt att flödet kan optimeras med hjälp av linjär programmering, mer exakt en metod benämnd Simplex-metoden.

Genom den framställning som kan göras när officersflöden ses som ett linjärt programmeringsproblem så synliggörs problem i personalstrukturen som inte hade upptäckts annars.

Den föreslagna modellen kräver dataförsörjning för att vara användbar. I rapporten föreslår vi olika metoder för att skatta värden på de variabler som modellen använder sig av.

Genom att använda de senaste personalramarna och antaganden baserade på Försvarsmaktens officiella statistik testar vi de båda modellerna samt optimeringsmetoden. Vi finner att någon rimlighetsprövning av befintliga personalramar i en matematisk mening med all trolighet inte har genomförts tidigare inom Försvarsmakten. Detta då resultaten av de optimeringsexempel som vi genomför antingen visar sig sakna lösning eller ger optimala lösningar som ej är konsistenta med befintliga personalramar.

Dessa resultat kan på längre sikt medföra problem för Försvarsmaktens personalförsörjning. Att i förväg undersöka om framtida personaluppfyllnad är teoretiskt möjligt skulle avhjälpa delar av de utmaningar Försvarsmakten framöver möter inom personalområdet. De modeller som häri presenteras kan, bland annat, användas till just en sådan realiserbarhetsprövning.

2 Personalflödesmodell

I detta kapitel presenteras i korta drag hur modellen för personalflöden är uppbyggd och vilka användningsområden den har. Den som önskar se hur modellen exakt är uppbyggd hänvisas till Appendix 1: Flödesmodell där den formella framställningen återfinns.

Den huvudfråga som modellen är byggd för att besvara är vilket årligt inflöde av officerare som krävs för att upprätthålla en över tiden oförändrad storlek på officerskategorierna. Modellen är byggd med ett antagande om att kostnadsminimering skall uppnås och tar därför fram det minsta antal nyrekryteringar som krävs för att balansera officersflödet (i OF1-OF5). Som en biprodukt av modellens konstruktion fås även en uppskattning på den av de tre variabler (antal i kategorierna, avgångsfrekvens, beföringstakt) som man inte använder som inmatat värde i modellen.

Modellen utgår ifrån att om en officerare i någon grad behövs så kan denna endast hämtas från kategorien närmast under. Det vill säga en kapten måste någon gång ha varit löjtnant och en löjtnant kan endast beföras till kapten eller kvarstanna som löjtnant. Dessutom baserar sig modellen på att inflöde av officerare, nyrekrytering, endast sker till den lägsta kategorien officerare. Sålunda antar vi för modellen (vilket också avspeglar den faktiska situationen⁵) att

- i) Allt inflöde av officerare sker till OF1
- ii) All rekrytering till kategorierna OF2 – OF5 sker från kategorien närmast under

Modellen är tidsbaserad. Den studerar för varje år förändringar i antalen i varje kategori och balanserar dessa så att samma antal återfinns i varje kategori vid varje givet år. Förutom att beföras och vara kvar i en kategori kan en officerare också sluta i Försvarsmakten. Vad modellen, enkelt uttryckt gör, är att den ser till utflödet ur varje kategori (på grund av avgångar och beföringar) och balanserar detta utflöde mot ett inflöde från kategorien närmast under. För den lägsta kategorien, OF1, balanseras utflödet av ett inflöde utifrån (dvs. officersprogrammet på FHS).

OF5 är den högsta officerskategori som modelleras. Detta beror på att kategorierna ovanför denna, generaler och amiraler, utses av regeringen och inte av Försvarsmakten själv. I modellen finns ett antagande om att även antalet generaler och amiraler är konstant över tiden. Även ur denna kategori sker avgångar varför modellen är konstruerad för att avkasta ett givet antal ersättare för generals-/amiralskategorierna varje år.

För att kunna använda modellen behövs uppskattningar på två av de tre variabler som modellen använder sig av, samt ett värde på hur många generaler/amiraler som skall utses varje år. Användning av modellen ger en

⁵ Som granskare påpekat sker ett visst inflöde av officerare till högre nivåer än OF1. Detta rör sådana som avslutat sin anställning i FM men sedan återanställts samt de som varit tjänstlediga längre perioder och när de återkommer får en ny tjänst. Därmed är det inte helt korrekt att allt inflöde av officerare sker till nivå OF1. I den presenterade modellen antar vi dock att återanställningar är av försumbar storhet.

optimering av den tredje variabeln som ej uppskattas. Dessutom fås det inflöde av nya officerare som måste ske varje år för att systemet skall hållas i balans.

De tre variablerna är:

- i) Antal officerare i varje kategori OF1 – OF5
- ii) Avgångar (i andel av hela kategorien) för varje kategori
- iii) Befordringstakt (som andel av hela kategorien) inom varje kategori

Givet att två av dessa kan uppskattas så kan alltså både inflödet och den tredje variabelns optimala värde fås.

Exempelvis så kan modellen, då officerskategoriernas storlek samt befordringstakten dem emellan matas in, ge värden på hur höga avgångarna inom varje kategori får vara samt hur många som måste rekryteras varje år för att systemet skall hålla.

3 Förslag på skattningar av de parametrar som ingår i modellen

I detta avsnitt ges förslag på hur man kan skatta de parametrar som behövs för att räkna enligt den föreslagna modellen.

3.1.1 Antalet i varje kategori

Antalet som behövs återfinnas i varje kategori OF1 till OF5 bör inte optimeras endast utifrån matematiska förutsättningar. De operativa och taktiska kraven på de förbandsenheter som bygger Försvarmakten måste också vägas in. Ett sådant övervägande, dvs. hur stor personalstyrka som behövs för att lösa de uppgifter som är ålagda försvarmakten, görs dock som en del i att omsätta Försvarmaktens utvecklingsplan till planerade personalvolym per nivå, som Ledningsstaben (LEDS) och Personalstaben (PERSS) vid Högkvarteret tar fram. Givet att man vill använda den ovan föreslagna modellen för att optimera någon av variablerna befordring (i modellen benämnd c_i) eller avgångar (i modellen benämnd d_i) skall förslagsvis alltså de volymer som LEDS/PERSS siffror innehåller användas som skattning av officerskategoriernas storlek (i modellen benämnd x_i). I sammanhanget skall nämnas att LEDS/PERSS i sina tabeller slår ihop kategorierna OF5 och OF6 till en kategori, OF5-6, varför vi om vi använder dessa uppgifter måste göra detsamma.

3.1.2 Tid innan befordran

Hur många år en officer i genomsnitt spenderar i en kategori innan denne befordras till nästa är samma sak som inversen av hur många i varje kategori som befordras varje år. Dvs. om en officer i genomsnitt spenderar tio år i en kategori innebär det att $\frac{1}{10}$ av officerarna i den kategorin blir befordrade till nästa varje år. Då system PRIO innehåller en personelhändelse kallad "Befordran" kan vi enkelt mäta detta genom att ta antalet befordrade ur en kategori varje år genom det totala antalet i den kategorin. Denna skattning, givet att system PRIO ger tillräckligt bra underlag, föreslås alltså för att skatta variabeln tid innan befordran (i modellen benämnd c_i^*).

3.1.3 Avgångar

Den kanske enklaste variabeln att skatta. Försvarmakten har under lång tid mätt så kallade "övriga" avgångar, alltså avgångar beroende på dödsfall, byte av arbetsgivare, uppsägningar etc. Variabeln avgångar, benämnd d_i^* , skattas alltså förslagsvis genom detta erfarenhetsvärde. Pensionsavgångar, benämnd p_i , utreder vi hur den kan beräknas i avsnittet om pensionsavgångar i Appendix 2. Dock så har Försvarmakten inte haft jämnstora rekryteringskullar över tiden, varför pensionsavgångar bör skattas genom att studera hur stor andel i de undersökta kategorierna som uppnår åldern 61 år (möjlig pensionsålder för officerare) för varje år den närmaste tiden. Skall metoden för framtida pensionsavgångar, dvs. där vi kan anta ett stationärt tillstånd, användas är

förslaget att skatta rekryteringsåldern t_r till 26 år, pensionsåldern t_p till 61 år vilket ger total tid i Försvarsmakten, $T = t_p - t_r = 61 - 26 = 35$ år.

4 Modellens tillämplighet med korta exempel

På grund av att grundrekrytering av officerare endast sker till den lägsta kategorin officerare, OF1, och att rekrytering till högre nivåer sker ur nivån närmast under, borde officerare lämpa sig väl för att modellera i en linjär och i $\mathbf{R}^n$ begränsad matematisk modell.

För att underlätta för läsaren att följa med i exemplen nedan ges här en sammanfattande tabell över de variabler som används:

Variabel	Betydelse
x_i	Antalet officerare i kategori i , exempelvis x_2 = antal i OF2
c_i	Den andel av x_i som befordras varje år
d_i	Den andel av x_i som slutar varje år
C_0	Antal nyrekryteringar till OF1 årligen
G	Antalet generaler/amiraler som regeringen utser varje år
p_i	Pensioner i kategori x_i årligen, en delmängd av d_i

4.1.1 Personalvolymen

Vi inleder testet av modellens tillämplighet med att undersöka vilka resultat som fås då vi angriper problemet med optimerade inflödet och numerären av officerare i hela försvarsmakten. För att kunna göra detta behöver vi en uppskattning av avgångarna, d_i , och befordringstakten c_i .

Vi använder oss av att avgångar på grund av uppsägning, dödsfall och egen begäran de senaste åren legat någorlunda konstant runt 2,5 %. Till detta kommer pensionsavgångar, p_i , som vi kan ta fram en skattning av genom att studera medelvärdet av hur stor del av varje officerskategori som uppnår pensionsålder de kommande åren. Detta ger genomsnittliga avgångsfrekvenser inom OF1 på 4,1 % per år, inom OF2 3,8 %, OF3 4,3 %, OF4 5,1 % och OF5 5,4 %.

Befordringstakt är något svårare att skatta då den i kapitel 3.1.2 föreslagna metoden inte idag kan användas på grund av bristande underlag. Vi antar för exemplet istället att en officer under karriären spenderar 4 år i OF1, 8 år i OF2, OF3 och OF4 samt slutligen 7 år i OF5.

Med dessa antaganden kan vi nu använda den föreslagna metoden, se Appendix 1: Flödesmodell, för att optimera intaget och numerären av officerare. Exakt hur detta görs visas i Appendix 3: Genomräknade exempel, i exempel 2, 3 och 4. En, ur ett flödesperspektiv, optimal försvarsmakt skulle med dessa antaganden bestå av 26 st. OF1, 39 st. OF2, 30 st. OF3, 22 st. OF4, 14 st. OF5 och nyrekrytera 8 personer varje år. Detta må vara optimalt utifrån ett kostnadsminimerande flödesperspektiv men troligtvis inte ur ett operativt militärt perspektiv.

Då det krävs en viss numerär för att lösa de uppgifter försvarsmakten har lägger vi in ett minsta antal som varje kategori får bestå av och gör ett variabelbyte, det vill säga lägger till en lägsta nivå i varje variabel och räknar om begränsningarna mellan kategorierna. Vi använder siffror som ligger till grund för FMUP⁶ för detta. Att direkt använda detta underlag ger dock negativa begränsningar mellan de tre högre kategorierna. Den enda rimliga tolkningen av detta är att vi tillåter degraderingar, vilket vi utesluter ur modellen. Dessutom saknas ett optimum med dessa variabelvärden. Vi gör därför ännu ett variabelbyte och kräver ett positivt flöde mellan alla kategorier. Vi får med dessa ytterligare begränsningar en försvarsmakt med ett årligt inflöde på 144 individer bestående av 528 OF1, 792 OF2, 969 OF3, 579 OF4 och 102 OF5, totalt 2 970 officerare i OF1-OF5.

Exemplen gör troligt att kategorierna OF1 och OF2, dvs. x_1 och x_2 i vår modell, har för få officerare i sig jämfört med de tre högre kategorierna (eller vice versa). Detta då vi måste minska på flödet från dessa två för att få en optimerbar struktur. De nämnda exemplen visar att det, med gjorda antaganden, inte går att i en matematisk mening optimera inflödet av officerare och flödet mellan officerskategorierna. Detta kan vi se eftersom vi måste göra flera variabelbyten och förändra inbördes relationer för att kunna optimera vår struktur.

4.1.2 Befordringstakt

Vi undersöker också, via Exempel 5 i Appendix 3, befordringstakten i ett optimalt skeende och finner att allt färre kan befordras varje år ju högre kategori som undersöks. Denna beräkning är relativt enkel. Eftersom vi för att beräkna avgångstakt måste ha kategoriernas storlek och avgångsfrekvens får vi även inflödet. Inflödet minus avgångarna i respektive kategori behöver då bara divideras med kategoriens storlek för att få den möjliga befordringstakten. För de lägre kategorierna bör med dessa antaganden 10-20 % befordras varje år i optimum, men för de högre endast 1,5, 1,6 respektive 3,9 %.

4.1.3 Avgångar

När vi undersöker avgångar, se Exempel 6 i Appendix 3, får vi resultat som visar under vilka gränser avgångar i de undersökta kategorierna måste hållas för att kunna hålla optimalt personalflöde. Vi får mycket låga tal (<1 %) för OF1 och negativt värde för OF3. Detta talar även det för att personalflödena i en matematisk mening inte är möjliga att hålla optimala med gjorda antaganden. De resultat som fås när avgångar undersöks är en bra indikator på hur stora avgångar inom de undersökta kategorierna som systemet klarar av att hantera för att bevara flöde och möjlighet att avkasta officerare i högre nivåer. Resultatet, och framför allt metoden, kan alltså användas i även kortsiktigare planering.

⁶ Försvarsmaktens utvecklingsplan

4.1.4 Pensionsavgångar

Vi undersöker också, via Exempel 7 i Appendix 3, pensionsavgångar och övriga avgångar enligt den för detta ändamål föreslagna modellen. Med de ganska modesta antaganden om avgångar som vi gör (2,5 % per år i alla kategorier) finner vi att 40-45 % av en officerskull kan förväntas vara kvar efter 35 års tjänstgöring, och alltså pensioneras i Försvarsmakten. Detta talar för att långt ifrån alla som anställs kvarstannar livet ut, och vi kan alltså förvänta oss en viss personalomsättning över tid. Den modell som används är också konstruerad så att högre beföringstakt minskar avgångar, i exemplet har vi använt en, förhållandevis, hög beföringstakt jämfört med Exempel 5 där vi beräknade beföringstakten. Större avgångar än som fått i Exempel 7 är alltså inte otroliga, tvärtom.

4.1.5 Avslutande ord

Avslutningsvis uppvisar den föreslagna modellen lovande resultat i den meningen att den kan användas som ett optimeringsverktyg för personalflöden inom Försvarsmakten (samt andra organisationer med liknande beföringssystem). Dock så tyder de resultat som fås i beräkningarna på att Försvarsmaktens nuvarande organisation inte är optimal i ett flödeshänseende. Om de föreslagna metoderna användes i samband med framtida personalplanering torde detta kunna rättas till.

5 Fortsatt arbete

Modellerna som ovan presenteras kan användas för att rimlighetspröva de personalramar som ligger till grund för utformningen av Försvarmaktens enheter. Det nya personalförsörjningssystemet för Försvarmakten vilar dock inte enbart på nyrekrytering av officerare utan även på antaganden om överföring till officerskategorien från (främst) specialistofficerskategorien och (i mindre utsträckning) soldatkategorierna, GSS.

En önskvärd utveckling av modellerna är därför att specialistofficerskategorierna inlemmas i modellen, som ett första steg som ytterligare en inflödesvariabel för officerare. Som ett andra steg skulle specialistofficerare fullt ut integreras i modellen. Samma gäller även soldatkategorierna (GSS). Som granskare påpekat sker även ett inflöde till högre officerskategorier på grund av återanställningar av officerare. Även detta inflöde bör införas i modellen.

De föreslagna modellerna skulle även kunna användas under seminarieliknande arbetsformer tillsammans med representanter för de funktioner inom Försvarmakten som är involverade i personalplanering. Vid ett sådant tillfälle kan modellerna och deras användningsområden närmare presenteras för tänkta användare, och dessa skulle till yttermera visso få möjligheten att påverka utvecklingen av modellerna samt ges tillfälle att bekanta sig med resultat från möjliga optimeringar.

Som sista förslag på fortsatt arbete vore det, särskilt om det ovan föreslagna seminariearbetet skulle komma till stånd, en stor fördel om optimeringsmetoderna kunde inprogrammeras i ett datorprogram som skulle ge en markant snabbare behandling av de frågeställningar som kan komma att undersökas.

6 Appendix 1: Flödesmodell

Vi kommer att modellera hur personalflödena av officerare rör sig genom de olika graderna inom Försvarsmakten. Vi kommer att stanna vid kategori OF5, då generalskategorierna (OF6 och uppåt) utses av regeringen och Försvarsmakten endast kan se till att det finns lämpliga personer att föreslå för befordran till OF6, men inte själv förändra antalet eller befordringstakten till kategorin. Vi kommer att undersöka antalet nyrekryteringar, ty även om Försvarsmakten inte bestämmer över Försvarshögskolans utbildningsvolym (FHS är en egen myndighet) så kan Försvarsmakten själv välja hur många myndigheten vill nyanställa.

Vi inleder med att definiera följande variabler:

$x_i(t)$: = antal officerare i kategori OF_i vid tidssteg t .

c_i : = den andel av x_i som befordras varje år, alternativt antal år i genomsnitt i en kategori innan befordran (vilket blir samma sak)

C_0 : = antal nyrekryteringar till OF1 årligen

6.1.1 Enkel modell

I den enkla modellen går alla, förr eller senare, hela vägen genom systemet och uppnår högsta graden. Personalflödet kan då beskrivas som ett ekvationssystem enligt nedan:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + C_0 - x_1(t)c_1$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + x_1(t)c_1 - x_2(t)c_2 = x_1(t)c_1 + x_2(t)(1 - c_2)$$

pss för x_3 , x_4 och x_5 .

För att behålla samma personalstyrka över tid måste alltså:

$C_0 = x_1c_1 = x_2c_2 = \dots = x_5c_5 \quad \forall t$, varför vi underlåter att skriva ut t i ekvationen till vänster.

Denna modell speglar knappast verkligheten då långt ifrån alla som rekryteras till Försvarsmakten blir befördrade till general/amiral. Därför utökar vi vår modell enligt nedan.

6.1.2 Modell med avgångar

För den utökade modellen definierar vi också:

d_i : = andel av kategori OF_i som slutar som officerare under varje år.

Vi gör också tre antaganden:

- i) För att minimera kostnader vill vi minimera C_0
- ii) Vi befinner oss i ett stationärt tillstånd, dvs $x_i(t+1) = x_i(t) \quad \forall i$
- iii) Vi vet G , antalet generaler/amiraler regeringen ämnar utse varje år

Detta ger ett ekvationssystem enligt nedan:

$$x_1 = x_1 + C_0 - c_1x_1 - d_1x_1 \Rightarrow C_0 = c_1x_1 + d_1x_1$$

$$\begin{aligned} x_2 = x_2 + c_1x_1 - c_2x_2 - d_2x_2 &\Rightarrow c_1x_1 = c_2x_2 + d_2x_2 \Rightarrow C_0 \\ &= c_2x_2 + d_2x_2 + d_1x_1 \end{aligned}$$

Och pss för x_3 , x_4 och x_5 vilket ger följande funktion:

$$C_0 = \sum_{j=1}^5 x_j d_j + x_5 c_5 = \sum_{j=1}^5 x_j d_j + G$$

Vilken är vårt mål att minimera. Funktionen begränsas av storleksförhållandet mellan de olika kategorierna samt den tid som det tar innan en individ anses kvalificerad för befordran. Att ha för många redo för befordran varje år kan inte anses vara ett problem här, då detta endast skulle medföra att en kvalitativ sällning kan göras. Flödet underifrån begränsas alltid av de platser som finns lediga högre upp i nivåerna. Att ha för få som fyller på underifrån är dock problematiskt, då det kan innebära personalbrist inom vissa kategorier. För modellens skull antar vi därför att det varje år måste finnas minst så många redo för befordran i kategori x_{i-1} som det slutar eller befordras vidare i kategori x_i . Detta ger följande begränsningar för vår målfunktion C_0 ovan:

$$c_1x_1 \geq c_2x_2 + d_2x_2 \Rightarrow c_1x_1 - c_2x_2 - d_2x_2 \geq 0$$

$$c_2x_2 \geq c_3x_3 + d_3x_3 \Rightarrow c_2x_2 - c_3x_3 - d_3x_3 \geq 0$$

$$c_3x_3 \geq c_4x_4 + d_4x_4 \Rightarrow c_3x_3 - c_4x_4 - d_4x_4 \geq 0$$

$$c_4x_4 \geq c_5x_5 + d_5x_5 \Rightarrow c_4x_4 - c_5x_5 - d_5x_5 \geq 0$$

$$c_5x_5 \geq G$$

Vi kan nu införa överskottsvariabler och får:

$$c_1x_1 - c_2x_2 - d_2x_2 - a_1 = 0$$

$$c_2x_2 - c_3x_3 - d_3x_3 - a_2 = 0$$

$$c_3x_3 - c_4x_4 - d_4x_4 - a_3 = 0$$

$$c_4x_4 - c_5x_5 - d_5x_5 - a_4 = 0$$

$$c_5x_5 - a_5 = G$$

Med målfunktionen:

$$-C_0 - x_1d_1 - x_2d_2 - x_3d_3 - x_4d_4 - x_5(d_5 + c_5) = 0$$

Som ger följande tablå:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$-C_0$	Sv
a_1	c_1	$-(c_2+d_2)$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
a_2	0	c_2	$-(c_3+d_3)$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	c_3	$-(c_4+d_4)$	0	0	0	-1	0	0	0	0
a_4	0	0	0	c_4	$-(c_5+d_5)$	0	0	0	-1	0	0	0
a_5	0	0	0	0	c_5	0	0	0	0	-1	0	G
$-C_0$	$-d_1$	$-d_2$	$-d_3$	$-d_4$	$-d_5$	0	0	0	0	0	1	0

Figur 1: Tablå för lösning av intag av officerare (tablå 1)

Tablå i Figur 1 kan lösas givet att vi vet c_i och d_i vilka vi kan få fram som erfarenhetsvärden ur Försvarmaktens statistik. Se kapitel Förslag på skattningar av de parametrar som ingår i modellen för förslag på hur dessa parametrar kan skattas.

Om vi istället vet x_i och d_i så vet vi vad C_0 är, se målfunktionen. Vi vet också vad c_i är, ty:

$$x_1 = x_1 - c_1 x_1 - d_1 x_1 + C_0 \Rightarrow \frac{C_0 - d_1 x_1}{x_1} = c_1$$

$$x_2 = x_2 - c_2 x_2 - d_2 x_2 + c_1 x_1 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1 x_1 - d_2 x_2}{x_2} = \frac{C_0 - d_1 x_1 - d_2 x_2}{x_2}$$

Pss för c_3 , c_4 , c_5 .

Vad händer om vi vet x_i och c_i ?

Givet att vi vet x_i och c_i så får vi målfunktion enligt tidigare men denna begränsas av:

$$c_1 x_1 - c_2 x_2 - d_2 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{c_1 x_1 - c_2 x_2}{x_2} \geq d_2 \Rightarrow d_2 \leq \frac{1}{x_2} (c_1 x_1 - c_2 x_2) =: \alpha_1$$

$$d_3 \leq \frac{1}{x_3} (c_2 x_2 - c_3 x_3) =: \alpha_2$$

$$d_4 \leq \frac{1}{x_4} (c_3 x_3 - c_4 x_4) =: \alpha_3$$

$$d_5 \leq \frac{1}{x_5} (c_4 x_4 - c_5 x_5) = \frac{1}{x_5} (c_4 x_4 - G) =: \alpha_4$$

Som med slackvariabler får utseendet:

$$d_2 + a_1 = \alpha_1$$

$$d_3 + a_2 = \alpha_2$$

$$d_4 + a_3 = \alpha_3$$

$$d_5 + a_4 = \alpha_4$$

Som överfört till tablå får utseendet:

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	a_1	a_2	a_3	a_4	$-C_0$	Sv
a_1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	α_1
a_2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	α_2
a_3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	α_3
a_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	α_4
$-C_0$	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	0	0	0	0	1	0

Figur 2: Tablå för lösning av officersavgångar (tablå 2)

I Appendix 3: Genomräknade exempel, löser vi tablåerna i både Figur 1 och Figur 2 med hjälp av antaganden gjorda enligt kapitlet Förslag på skattningar av de parametrar som ingår i modellen.

6.1.3 Modell för ett förband

Den ovan föreslagna modellen kan också användas för att beräkna flödet inom ett förband. Vi använder följande variabler:

$x(t)$:= antalet i OF1 vid tiden t

$y(t)$:= antalet i OF2 vid tiden t

$z(t)$:= antalet i OF3 vid tiden t

d_x, d_y, d_z := andel av populationen i x, y, z som slutar varje år

c_x, c_y, c_z := andel av populationen i x, y, z som befordras varje år

Och som tidigare har vi C_0 för antalet intagna (i detta fall till förbandet) varje år och Ψ (ovan G) som här får beteckna antalet som skall befordras från OF3.

Detta ger en målfunktion $C_0 = d_x x(t) + d_y y(t) + d_z z(t) + \Psi$ med begränsningar:

$$c_x x(t) \geq (d_y + c_y) y(t) \Rightarrow c_x x(t) - (d_y + c_y) y(t) \geq 0$$

$$c_y y(t) \geq (d_z + c_z) z(t) \Rightarrow c_y y(t) - d_z z(t) \geq \Psi$$

$$c_z z(t) \geq \Psi$$

$$x, y, z \geq 0$$

Vi kan nu införa överskottsvariabler och får:

$$c_x x(t) - (d_y + c_y) y(t) - \alpha = 0$$

$$c_y y(t) - d_z z(t) - \beta = \Psi$$

$$c_z z(t) - \gamma = \Psi$$

$-C_0 - d_x x(t) - d_y y(t) - d_z z(t) = 0$, och får komma ihåg att öka vårt svar med Ψ , då vi alltid måste arbeta med en funktion $=0$.

Vilket ger en tablå enligt nedan.

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	Sv
X	c_x	$-(c_y+d_y)$	0	-1	0	0	0	0
Y	0	c_y	$-d_y$	0	-1	0	0	ψ
Z	0	0	c_z	0	0	-1	0	ψ
$-C_0$	$-d_x$	$-d_y$	$-d_z$	0	0	0	1	0

Figur 3: Tablå för officersintag för ett förband (tablå 3)

Vi kommer att ge en lösning för Figur 3 i Appendix 3: Genomräknade exempel, givet vissa antaganden baserat på förslagen i kapitlet Förslag på skattningar av de parametrar som ingår i modellen.

7 Appendix 2: Modell för pensionsavgångar

Givet ett stationärt tillstånd (vilket vi antagit) kan årliga pensionsavgångar beräknas. Detta kommer vi att behöva för att beräkna d_i ovan på ett korrekt sätt. Vi delar därför upp d_i enligt:

$$d_i = d_i^* + p_i$$

Där d_i^* står för övriga avgångar (byte av arbetsgivare, dödsfall etc.) och kan fås fram via erfarenhetsvärden.

p_i står för pensioner och kan som tidigare sagts beräknas i ett stationärt tillstånd. Vi kommer att angripa detta problem genom en metod som kan synas vara en aning bakvänd. Vi kommer att modellera hur många av en årskull (i rekryteringstermer, dvs. C_0) som återfinns i någon av de fem kategorierna vi undersöker (dvs. x_i) vid varje givet år. Detta ger oss en numerär skattning av pensionsavgångar, p_i^* , som kan delas med kategoriens storlek för att få p_i . Vi använder oss också av c_i^* , vilket motsvarar c_i ovan och är ett mått på andelen av en kategori som befordras varje år.

Modellen kräver vissa antaganden, vilka görs nedan.

- 1) All rekrytering, befordran och avgång sker vid årsskiftet, dvs. t är diskret
- 2) Anställda rekryteras vid åldern t_r och pensioneras vid åldern t_p och tillbringar alltså $T = t_p - t_r$ år i Försvarsmakten
- 3) Befordran till nästföljande nivå efter $1/c_i^*$ år
- 4) $c_i^{-1} = (c_i^*)^{-1} + (c_{i-1}^*)^{-1} + (c_{i-2}^*)^{-1} + \dots$
- 5) Inga tidiga befordringar sker, dvs. befordran inleds först det år då medeltalsår innan befordran inträffar

För att undvika alltför omfattande notation nedan underlåter vi att skriva ut stjärnan i d_i^* och p_i^* .

Vi inleder nu med att studera hur många av en årskull som återfinns i x_1 vid varje årsskifte t .

För det första årsskiftet har vi endast den rekryterade kullen, följaktligen:

$$x_1(0) = C_0$$

Till nästa år har några övriga avgångar skett och av kullen återstår:

$$x_1(1) = x_1(0) - d_1 x_1(0) = (1 - d_1) C_0$$

Samma mönster upprepar sig vidare tills det att befordran till OF2 inleds, så alltså fås formeln för antalet i OF1 innan befordran inleds:

$$x_1(2) = x_1(1) - d_1 x_1(1) = (1 - d_1)^2 C_0 \Rightarrow x_1(t) = (1 - d_1)^t C_0, \\ \forall t < c_1^{-1}$$

Vi skall nu undersöka vad som sker när befordran till OF2 inleds. Vi antar att befordran minskar benägenheten att avgå varför vi låter befordran ske innan avgångar.

För första året med befordran till OF2 fås:

$$\begin{aligned}
 x_1(c_1^{-1}) &= x_1(c_1^{-1} - 1) - c_1^* x_1(c_1^{-1} - 1) - d_1(1 - c_1^*) x_1(c_1^{-1} - 1) = \\
 &= x_1(c_1^{-1} - 1)(1 - c_1^*)(1 - d_1) = \\
 &= (1 - d_1)^{c_1^{-1}-1} C_0(1 - c_1^*)(1 - d_1) = \\
 &= (1 - d_1)^{c_1^{-1}} C_0(1 - c_1^*)
 \end{aligned}$$

Samma mönster upprepar sig, alltså:

$$\Rightarrow x_1(t) = (1 - d_1)^t (1 - c_1^*)^{t+1-c_1^{-1}} C_0, \forall t \geq c_1^{-1}$$

Sammanfattningsvis för OF1:

$$x_1(t) = \begin{cases} (1 - d_1)^t C_0, & t < c_1^{-1} \\ (1 - d_1)^t (1 - c_1^*)^{t+1-c_1^{-1}} C_0, & t \geq c_1^{-1} \end{cases}$$

Så vi vet nu att $p_1 = x_1(T)$, där x_1 enligt ovan.

Vi kan nu gå vidare och undersöka OF2.

Inledningsvis konstaterar vi att

$$x_2(0) = 0, x_2(1) = 0, \dots \text{ tills } t = c_1^{-1} + 1, \text{ dvs. } x_2(t) = 0, \leq c_1^{-1}$$

Vi studerar nu vad som sker när befordran inletts:

$$x_2[c_1^{-1} + 1] = c_1^* x_1[c_1^{-1} - 1]$$

Observera att de befordrade hämtas från två år innan innevarande år, då vi valt att flytta över alla vid årsskiftet. Detta simulerar att det går åt en del tid till ett gradbyte.

$$\begin{aligned}
 x_2[c_1^{-1} + 2] &= x_2[c_1^{-1} + 1] + c_1^* x_1[c_1^{-1}] - d_2 x_2[c_1^{-1} + 1] \\
 &= (1 - d_1)^{c_1^{-1}} c_1^* C_0 + (1 - d_1)^{c_1^{-1}+1} (1 - c_1) c_1^* C_0 - d_2(1 - d_1)^{c_1^{-1}} c_1^* C_0 = (1 - d_2) c_1^* x_1[c_1^{-1} - 1] + c_1^* x_1[c_1^{-1}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2[c_1^{-1} + 3] &= x_2[c_1^{-1} + 2] + c_1^* x_1[c_1^{-1} + 1] - d_2 x_2[c_1^{-1} + 2] \\
 &= (1 - d_2) x_2[c_1^{-1} + 2] + c_1^* x_1[c_1^{-1} + 2] \\
 &= (1 - d_2)^2 c_1^* x_1[c_1^{-1} - 1] + (1 - d_2) c_1^* x_1[c_1^{-1}] + c_1^* x_1[c_1^{-1} + 1]
 \end{aligned}$$

Detta mönster upprepar sig tills befordran till OF3 inleds, varför vi kan sammanfatta

$$\begin{aligned}
 &x_2(t) \\
 &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c_1^{-1} \\ c_1^* \sum_{i=0}^{t-1-c_1^{-1}} (1 - d_2)^{(t-1-c_1^{-1})-i} x_1(c_1^{-1} + i - 1), & c_1^{-1} < t < c_2^{-1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

För befordran till OF3 ser utvecklingen ut som följer

$$\begin{aligned} x_2[c_2^{-1}] &= x_2[c_2^{-1} - 1] - c_2^* x_2[c_2^{-1} - 1] - (1 - c_2^*) d_2 x_2[c_2^{-1} - 1] \\ &\quad + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 2] \\ &= x_2[c_2^{-1} - 1](1 - c_2^*)(1 - d_2) + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2[c_2^{-1} + 1] &= x_2[c_2^{-1}] - c_2^* x_2[c_2^{-1}] - (1 - c_2) d_2 x_2[c_2^{-1}] + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 1] \\ &= x_2[c_2^{-1}](1 - c_2^*)(1 - d_2) + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 1] \\ &= (1 - c_2^*)(1 - d_2)(x_2[c_2^{-1} - 1](1 - c_2^*)(1 - d_2) \\ &\quad + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 2])) + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 1] \\ &= ((1 - c_2^*)(1 - d_2))^2 x_2[c_2^{-1} - 1] \\ &\quad + (1 - c_2^*)(1 - d_2) c_1^* x_1[c_2^{-1} - 2] + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 1] \end{aligned}$$

Vi sätter $\gamma_2 := (1 - d_2)(1 - c_2^*)$ för att förenkla notationen, och får

$$x_2[c_2^{-1} + 1] = \gamma_2^2 x_2[c_2^{-1} - 1] + \gamma_2 c_1^* x_1[c_2^{-1} - 2] + c_1^* x_1[c_2^{-1} - 1]$$

Nästa steg ser ut som följer

$$\begin{aligned} x_2[c_2^{-1} + 2] &= \gamma_2 x_2[c_2^{-1} + 1] + c_1^* x_1[c_2^{-1}] \\ &= \gamma_2^3 x_2[c_2^{-1} - 1] + c_1^* (\gamma_2^2 x_1[c_2^{-1} - 2] + \gamma_2 x_2[c_2^{-1} - 1] \\ &\quad + x_2[c_2^{-1}]) \end{aligned}$$

Och samma mönster upprepar sig, varför vi får

$$x_2[t] = \gamma_2^{t+1-c_2^{-1}} x_2[c_2^{-1} - 1] + c_1^* \sum_{i=c_2^{-1}}^t \gamma_2^{t-i} x_1[i - 2], \quad t \geq c_2^{-1}$$

Som är den tredje delen av formeln för antal kvarvarande i OF2 efter t år.

Så vi vet nu att $p_2 = x_2(T)$ samt hur vi räknar ut $x_2(T)$.

Vi går vidare till OF3 och inleder med att konstatera att

$$x_3[0] = x_3[1] = \dots = 0, \text{ så } x_3[t] = 0, t \leq c_2^{-1}$$

Sedan

$$\begin{aligned} x_3[c_2^{-1} + 1] &= c_2^* x_2[c_2^{-1} - 1] \\ x_3[c_2^{-1} + 2] &= x_3[c_2^{-1} + 1] - d_3 x_3[c_2^{-1} + 1] + c_2^* x_2[c_2^{-1}] \\ &= (1 - d_3) c_2^* x_2[c_2^{-1} - 1] + c_2^* x_2[c_2^{-1}] \\ &= c_2^* ((1 - d_3) x_2[c_2^{-1} - 1] + x_2[c_2^{-1}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3[c_2^{-1} + 3] &= x_3[c_2^{-1} + 2] - d_3 x_3[c_2^{-1} + 2] + c_2^* x_2[c_2^{-1} + 1] \\ &= c_2^* ((1 - d_3)((1 - d_3) x_2[c_2^{-1} - 1] + x_2[c_2^{-1}]) \\ &\quad + x_2[c_2^{-1} + 1]) \end{aligned}$$

Och mönstret upprepar sig varför vi kan sluta oss till att

$$x_3[t] = c_2^* \left(\sum_{i=c_2^{-1}}^{t-1} (1-d_3)^{t-1-i} x_2[i-1] \right), \quad c_2^{-1} < t < c_3^{-1}$$

När befordran till OF4 inletts får vi:

$$\begin{aligned} x_3[c_3^{-1}] &= x_3[c_3^{-1} - 1] - c_3^* x_3[c_3^{-1} - 1] - (1 - c_3^*) x_3[c_3^{-1} - 1] \\ &\quad + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 2] \\ &= (1 - c_3^*)(1 - d_3) x_3[c_3^{-1} - 1] + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3[c_3^{-1} + 1] &= x_3[c_3^{-1}] - c_3^* x_3[c_3^{-1}] - (1 - c_3^*) d_3 x_3[c_3^{-1}] + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 1] \\ &= (1 - c_3^*)(1 - d_3) x_3[c_3^{-1}] + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 1] \end{aligned}$$

Om vi enligt tidigare mönster sätter $\gamma_3 := (1 - c_3^*)(1 - d_3)$ får vi ovan ekvation till

$$x_3[c_3^{-1} + 1] = \gamma_3 (\gamma_3 x_3[c_3^{-1} - 1] + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 2]) + c_2^* x_2[c_3^{-1} - 1]$$

Fortsättningsvis

$$x_3[c_3^{-1} + 2] = \gamma_3 x_3[c_3^{-1} + 1] + c_2^* x_2[c_3^{-1}]$$

$$x_3[c_3^{-1} + 3] = \gamma_3 x_3[c_3^{-1} + 2] + c_2^* x_2[c_3^{-1} + 1]$$

Etc. vilket ger oss formeln för OF3 efter att befordran till OF4 inletts som i analogi med ovan ser ut

$$x_3[t] = \gamma_3^{t+1-c_3^{-1}} x_3[c_3^{-1} - 1] + c_2^* \sum_{i=c_3^{-1}}^t \gamma_3^{t-i} x_2[i-2], \quad t \geq c_3^{-1}$$

Vilket ger oss möjlighet att räkna ut x_3 , för att finna $p_3 = x_3[T]$.

Analogt med ovanstående gäller sedan att:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4[t] = 0, \quad t \leq c_3^{-1} \\ x_4[t] = c_3^* \sum_{i=c_3^{-1}}^{t-1} (1-d_4)^{t-i} x_3[i-1], \quad c_3^{-1} < t < c_4^{-1} \\ x_4[t] = \gamma_4^{t+1-c_4^{-1}} x_4[c_4^{-1} - 1] + c_3^* \sum_{i=c_4^{-1}}^t \gamma_4^{t-i} x_3[i-2], \quad t \geq c_4^{-1} \end{array} \right.$$

Vi kan också se att, återigen analogt med ovan:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5[t] = 0, \quad t \leq c_4^{-1} \\ x_5[t] = c_4^* \sum_{i=c_4^{-1}}^{t-1} (1-d_5)^{t-i} x_4[i-1], \quad c_4^{-1} < t \end{array} \right.$$

Vi kan bortse från $t > c_5^{-1}$ ovan när vi vill räkna ut pensionsavgångar eftersom vi antagit att $c_5^* x_5[T] = G$ så vi vet det exakta antalet som går vidare till OF6.

Vi vet därför att:

$$p_5 = x_5[T] - G$$

Vilket avslutar avsnittet om pensionsavgångar i ett stationärt tillstånd.

8 Appendix 3: Genomräknade exempel

I detta kapitel används den ovan föreslagna modellen för att beräkna några exempel på frågor som kan vara av intresse för försvarsmakten gällande personalflöden, avgångar samt befodringsvägar. I alla exempel avrundar vi till maximalt tre siffror. Innan vi inleder påminner om alla de variabler vi definierat ovan:

Variabel	Betydelse
x_i	Antalet officerare i kategori i , exempelvis x_2 = antal i OF2
c_i	Den andel av x_i som befodras varje år
d_i	Den andel av x_i som slutar varje år
C_0	Antal nyrekryteringar till OF1 årligen
G	Antalet generaler/amiraler som regeringen utser varje år
p_i	Pensioner i kategori x_i årligen. En delmängd av d_i i modellen för personalflöden och ett resultat i antal personer i modellen för pensionsavgångar.
ψ	Samma som G , fast i exemplet ett förband
y, z	Används som index istället för 2 och 3 i modellen för ett förband, t.ex. motsvaras då d_y av d_2

8.1.1 Exempel 1: Modell för ett förband

Vi börjar med att optimera flödet inom ett förband och återvänder till tablå 3.

	x	y	z	α	β	γ	$-C_0$	Sv
x	c_x	$-(c_y+d_y)$	0	-1	0	0	0	0
y	0	c_y	$-d_y$	0	-1	0	0	ψ
z	0	0	c_z	0	0	-1	0	ψ
$-C_0$	$-d_x$	$-d_y$	$-d_z$	0	0	0	1	0

Denna tablå kan lösas givet att vi vet de efterfrågade c , d och ψ . Vi lånar från nedanstående Exempel 2 värden för d_1, d_2, d_3 , dvs. i vårt fall d_x, d_y, d_z och värden för c_i dels från Exempel 2 och från Exempel 5 (se nedan för dessa). Givet dessa värden kan vi välja ett förband och med det antal OF3 som finns på det förbandet få fram ett värde på ψ . Om vi för exemplets skull använder oss av K3 för två år sedan, där det då fanns 33 stycken OF3 får vi ett värde på ψ : $\psi_1 = 4,125$: $\psi_2 = 1,287$ beroende på vilket av värdena på c_i vi använder oss av. Rapportens framsida visar en lösning på tablå 3 med $\psi_1 = 4$ (avrundat till heltal då människor är en svårdelad storhet) och $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{8} = c_3$. Ej visad men uträknad finns också fallet $\psi_1 = 1$ med $c_1 = 0,214$, $c_2 = 0,098$, $c_3 =$

0,039. För den som inte önskar följa lösningen så blir resultatet $C_0 = 4,25$, $x = 31, y = 42, z = 32$ i det första fallet och $C_0 = 9,8, x = 56, y = 81, z = 100$ i det andra fallet.

8.1.2 Exempel 2: Åter till tablå 1

I detta exempel önskar vi beräkna tablå 1 från tidigare. Vi använder oss av följande skattningar.

När det gäller avgångar använder vi oss av att det som kallas ”övriga avgångar”, dvs. byte av arbetsgivare, dödsfall etc. de senaste åren legat på mellan två och tre procent. Vi räknar också ut de förestående pensionsavgångarna de kommande åren, se nedan.

$$d_i^* = 2,5\%$$

$$p_1 = \frac{\overline{x_1(55 - 63)}}{x_1} = \frac{48}{3041} \cong 1,6\% \Rightarrow d_1 = 2,5\% + 1,6\% = 4,1\%$$

$$p_2 = \frac{\overline{x_2(55 - 63)}}{x_2} = \frac{41}{3049} \cong 1,3\% \Rightarrow d_2 = 3,8\%$$

$$p_3 = \frac{\overline{x_3(55 - 63)}}{x_3} = \frac{32}{1764} \cong 1,8\% \Rightarrow d_3 = 4,3\%$$

$$p_4 = \frac{\overline{x_4(55 - 63)}}{x_5} = \frac{22}{835} \cong 2,6\% \Rightarrow d_4 = 5,1\%$$

$$p_5 = \frac{\overline{x_5(55 - 63)}}{x_5} = \frac{9}{313} \cong 2,9\% \Rightarrow d_5 = 5,4\%$$

De skattningar av p_i som vi använder oss av är alltså medelvärdet av det antal officerare i varje kategori 1 – 5 som uppnår pensionsålder varje år de närmaste åren, dividerat med det totala antalet i varje kategori idag.

Variabeln c_i är den av de tre svåraste variabeln att skatta, det underlag som finns i PRIO på (den tidigare nämnda) personalhändelsen befordran är idag inte tillräckligt för att använda. Vi använder oss istället av följande skattningar av c_i .

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{8}$$

$$c_3 = \frac{1}{8}$$

$$c_4 = \frac{1}{8}$$

$$c_5 = \frac{1}{7}$$

Tablå 1 ger en optimal lösning (se Appendix 4) på $C_0 = 7,67$, med ingående variabelvärden

$$x_1 = 25,7 \quad x_2 = 38,6 \quad x_3 = 29,6 \quad x_4 = 22 \quad x_5 = 14$$

8.1.3 Exempel 3: LEDS/PERSS personalramar och tablå 1

De värden som fås ovan på x_i håller sig inte inom av LEDS/PERSS givna ramar, men är en optimal lösning på vårt problem. Ramarna är som följer:

$$x_1 \in (490, 570)$$

$$x_2 \in (770, 900)$$

$$x_3 \in (935, 1065)$$

$$x_4 \in (560, 620)$$

$x_5 \in (95, 150)$ Observera att x_5 motsvarar OF5-6 i enlighet med LEDS/PERSS uppgifter

$$x_6 \in (20, 25) \quad [\Rightarrow G = 2]$$

För att tillse att vi håller oss inom ramarna får vi göra variabelbyten:

$$x_1 = x_1^* + 490, \quad x_2 = x_2^* + 770, \quad x_3 = x_3^* + 935,$$

$$x_4 = x_4^* + 560, \quad x_5 = x_5^* + 95$$

Och lägger till begränsningar:

$$x_1^* \leq 80, \quad x_2^* \leq 130, \quad x_3^* \leq 130, \quad x_4^* \leq 60, \quad x_5^* \leq 55$$

Med de nya värdena kan vi skriva om begränsningarna enligt nedan:

$$0,25x_1^* + 122,5 - 0,166x_2^* - 127,82 \Rightarrow 0,25x_1^* - 0,166x_2^* \geq 5,32$$

$$0,125x_2^* - 0,163x_3^* \geq 56,15$$

$$0,125x_3^* - 0,168x_4^* \geq -22,8$$

$$0,125x_4^* - 0,197x_5^* \geq -51,29$$

$$0,143x_5^* \geq -11,59$$

Målfunktionen förändras, genom att alla x_i byts mot x_i^* och siffran 136,84 läggs till. Vi kan dock använda samma målfunktion och öka det tal vi får i optimum med 136,84, då vi alltid måste arbeta med en målfunktion som är lika med noll.

Tyvärr existerar ingen optimal lösning (se tablåer i Appendix 4) på det nu uppställda problemet. Vi kan dock begrunda det kloka i att ha negativa begränsningar i de tre sista funktionerna. Den enda rimliga tolkningen är att vi tillåter degraderingar av officerare vid negativa flöden, vilket vi tidigare sagt inte är tillåtet i modellen. Detta kan möjligen skvallra om att de personalramar som används i exemplet är, i en matematisk mening, något för högt tilltagna i de tre övre kategorierna eller om man så vill vice versa gällande de lägre. För vår modell är det intressanta dock dessa begränsningar inte tillåtna varför vi byter ut dem mot följande

8.1.4 Exempel 4: Tablå 1 och LEDS/PERSS ramar fortsatt

$$0,25x_1^* - 0,166x_2^* \geq 5,32$$

$$0,125x_2^* - 0,163x_3^* \geq 56,15$$

$$0,125x_3^* - 0,168x_4^* \geq 0$$

$$0,125x_4^* - 0,197x_5^* \geq 0$$

$$0,143x_5^* \geq 0$$

Med dessa begränsningar har målfunktionen ett optimum i $C_0 = 30,2$ dvs. ett intag på 167 personer per år, med värden

$$x_1^* = 320, \quad x_2^* = 449, \quad x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$$

Detta bryter dock mot de övre begränsningar som vi har på värdena för x_1 och x_2 och ger vidare värdet noll för de tre övre personalkategorierna, vilket alltså skulle innebära att de ligger på sin lägsta gräns (se ovan under Exempel 3 för dessa). Dock så tilläggs detta värde i efterhand och effekten av dessa värden i själva begränsningsolikheten är att flödet mellan de olika kategorierna är obefintligt.

Då inte heller detta är en optimal situation kan vi kräva ett positivt flöde mellan alla kategorier och alltså använda följande begränsningar

$$0,25x_1^* - 0,166x_2^* \geq 5,32$$

$$0,125x_2^* - 0,163x_3^* \geq 56,15$$

$$0,125x_3^* - 0,168x_4^* \geq 1$$

$$0,125x_4^* - 0,197x_5^* \geq 1$$

$$0,143x_5^* \geq 1$$

Vilket i tablå 1 ger en optimal lösning $C_0 = 36,8$ och värden på

$$x_1^* = 349, \quad x_2^* = 493, \quad x_3^* = 33,6, \quad x_4^* = 19, \quad x_5^* = 7$$

Vilket fortfarande är för höga värden i de två första kategorierna.

Vi kan alltså misstänka att det som leder till de för höga värdena på x_1 och x_2 är storleksrelationen mellan de två samt x_3 , vilket medför att de begränsande värdena blir höga (för att kategoriernas storlek skall tas hänsyn till). Om vi bortser från de ramar som finns och endast kräver att det skall ske ett positivt flöde mellan kategorierna, dvs. begränsningar enligt nedan

$$0,25x_1^* - 0,166x_2^* \geq 1$$

$$0,125x_2^* - 0,163x_3^* \geq 1$$

$$0,125x_3^* - 0,168x_4^* \geq 1$$

$$0,125x_4^* - 0,197x_5^* \geq 1$$

$$0,143x_5^* \geq 1$$

Så fås ett optimalt värde på $C_0 = 7,33$ (kom ihåg att detta innebär ett inflöde på 144 personer) och övriga värden

$$x_1^* = 38,4 \quad x_2^* = 51,8 \quad x_3^* = 33,6 \quad x_4^* = 19 \quad x_5^* = 7$$

Vilket håller sig inom gränserna satta för x_1 men bryter mot relationerna mellan x_1 och x_2 samt mellan x_2 och x_3 .

Exempel 2, 3 och 4 visar att det, med de antaganden och begränsningar som vi här använt, inte går att matematiskt optimera flödet mellan de undersökta kategorierna och inflödet av personal inom givna ramar. □

8.1.5 Exempel 5: När vi vet kategoriernas storlek och avgångsfrekvens

I detta exempel använder vi oss av värden på x_i som vi får fram genom att ta medelvärden av den övre och undre gränsen på kategorierna ur LEDS/PERSS ramar. Detta ger

$$x_1 = \frac{570 + 490}{2} = 530$$

$$x_2 = \frac{900 + 770}{2} = 835$$

$$x_3 = \frac{1065 + 935}{2} = 1\,000$$

$$x_4 = \frac{620 + 560}{2} = 590$$

$$x_5 = \frac{150 + 95}{2} = 122,5$$

Som tidigare använder vi $G = 2$ och $d_i^* = 2,5\%$ vilket medför att

$$d_1 = 4,1\% \quad d_2 = 3,8\% \quad d_3 = 4,3\% \quad d_4 = 5,1\% \quad d_5 = 5,4\%$$

Vi får nu ett värde på målfunktionen

$$C_0 = 0,041 * 530 + 0,038 * 835 + 0,043 * 1000 + 0,051 * 590 + 0,054 * 122,5 + 2 = 135,17$$

Vi får också värden på c_i enligt nedan

$$c_1 = \frac{C_0 - d_1 x_1}{x_1} = \frac{135,17 - 0,041 * 530}{530} = 0,214 \approx \frac{1}{4,67}$$

$$c_2 = \frac{C_0 - d_1 x_1 - d_2 x_2}{x_2} = \frac{135,17 - 21,73 - 31,73}{835} = 0,098 \approx \frac{1}{10,2}$$

$$c_3 = \frac{C_0 - d_1 x_1 - d_2 x_2 - d_3 x_3}{x_3} = \frac{135,17 - 21,73 - 31,73 - 43}{1000} = 0,039 \approx \frac{1}{25,6}$$

$$c_4 = \frac{C_0 - d_1 x_1 - d_2 x_2 - d_3 x_3 - d_4 x_4}{x_4} = \frac{135,17 - 21,73 - 31,73 - 43 - 30,9}{590} = 0,015 \approx \frac{1}{66,7}$$

$$c_5 = \frac{C_0 - d_1x_1 - d_2x_2 - d_3x_3 - d_4x_4 - d_5x_5}{x_5} = \frac{2}{122,5} = 0,016 \approx \frac{1}{62,5}$$

Vilket visar att teori och praktik inte alltid stämmer helt överens. I modellen har vi antagit att det finns en direkt relation mellan andelen i varje kategori som blir befordrade varje år och den tid som en anställd i genomsnitt spenderar i varje kategori. Detta antagande visar sig vara rimligt, givet de ingångsvärden vi använder oss av, för de första två kategorierna. För de senare tre faller denna relation. Även om det inte är orimligt att c:a 3,9 % av OF3 samt c:a 1,5 % av OF4 och OF5 befordras varje år, vilket beräkningen ovan visar, så är det helt orimligt att det skulle ta över 25 år att bli befordrad från OF3 och över 60 år att bli det från OF4 och OF5. Detta beror troligen på att en stor andel av de som når nivåerna OF3 och över har nått sin, individuella, slutnivå inom Försvarsmakten. Vår modell är inte konstruerad för att hantera detta utan bortser från individuella olikheter. □

8.1.6 Exempel 6: Tillbaka till tablå 2

Givet att vi vet x_i och c_i så kan vi beräkna gränser på d_i för att flödet skall bevaras. Vi använder oss av samma värden på x_i som i Exempel 5 och samma värden på c_i som i Exempel 2, 3 och 4.

Därmed fås:

$$d_2 \leq \frac{1}{x_2}(c_1x_1 - c_2x_2) = \frac{132,5 - 104,4}{835} \approx 0,034$$

$$d_3 \leq \frac{c_2x_2 - c_3x_3}{x_3} = \frac{104,4 - 125}{1000} \approx -0,021$$

$$d_4 \leq \frac{c_3x_3 - c_4x_4}{x_4} = \frac{125 - 73,75}{590} \approx 0,087$$

$$d_5 \leq \frac{c_4x_4 - c_5x_5}{x_5} = \frac{73,75 - 17,52}{122,5} \approx 0,459$$

Vi kan inte beräkna d_1 eftersom vi måste ha värdet på C_0 för detta, enligt

$$d_1 \leq \frac{C_0 - c_1x_1}{x_1}$$

Om vi lånar värdet på C_0 från Exempel 5 (alltså 135,17) så får vi d_1 till

$$d_1 \leq \frac{C_0 - c_1x_1}{x_1} = \frac{135,17 - 0,25 * 530}{530} = \frac{2,67}{530} \approx 0,005$$

Denna siffra är dock mycket osäker.

Lösningen på tablå 2 blir av uppenbara skäl noll om vi försöker minimera funktionen och får värdet 138 om vi försöker maximera den och använder den osäkra uppskattningen på d_1 och ökar restriktionen på d_3 till $d_3 \leq 0$.

Beräkningarna ovan och resultatet av dem bör kommenteras på. För det första så leder de antaganden som används till att avgångarna inom kategori tre måste

vara negativa för att flödet skall vara i balans. Detta är naturligtvis ett orimligt resultat och torde bero på de värden som ligger till grund för antaganden som görs gällande c_i behöver förbättras avseende kvaliteten. De resultat som fås när optimeringen genomförs kan vara användbara till att veta inom vilka gränser avgångar, i de undersökta kategorierna, måste hålla sig inom för att personalflödet skall fungera. $\square$

8.1.7 Exempel 7: Pensionsavgångar inom kategorier

Tidigare optimeringar har gett ett intag per år på mellan 135 och 167 personer per år. Vi kan nu använda modellen för pensionsavgångar för att undersöka hur många av dessa som pensioneras ur varje kategori. Vi kan använda oss av medeltalet, 151, för intag i detta exempel.

Vi vet att

$$x_1(t) = (1 - d_1)^t (1 - c_1^*)^{t+1-c_1^{-1}} C_0$$

Och följaktligen

$$x_1(35) = (1 - 0,025)^{35} (1 - 0,25)^{35+1-4} * 151 = 0,4123 * 0,0001 * 151 \cong 0,006$$

Så vi kan förvänta oss att ingen eller möjligtvis en person är kvar i OF1 till pensionering.

Vidare vet vi

$$x_2[t] = \gamma_2^{t+1-c_2^{-1}} x_2[c_2^{-1} - 1] + c_1^* \sum_{i=c_2^{-1}}^t \gamma_2^{t-i} x_1[i - 2], \quad t \geq c_2^{-1}$$

Så för $t = 35$ och med $c_2^{-1} = 12$

$$x_2[35] = \gamma_2^{22} x_2[11] + 0,25 \sum_{i=12}^{35} \gamma_2^{35-i} x_1[i - 2]$$

Och att

$$x_2[t] = c_1^* \sum_{i=0}^{t-1-c_1^{-1}} (1 - d_2)^{(t-1-c_1^{-1})-i} x_1(c_1^{-1} - 1 + i), \quad c_1^{-1} < t < c_2^{-1}$$

Det vill säga att

$$x_2[11] = 0,25 \sum_{i=0}^6 (1 - 0,025)^{6-i} x_1(3 + i) \approx 104,18$$

Vilket ger (med $\gamma_2 = (1 - 0,025)(1 - 0,125) = 0,853125$)

$$x_2[35] = \gamma_2^{24} x_2[11] + 0,25 \sum_{i=12}^{35} \gamma_2^{35-i} x_1[i - 2] \approx 2,99$$

Så vi kan förvänta oss att tre eller möjligtvis två personer är kvar i OF2 till pensionen.

Vi kan gå vidare till OF3, som beskrivs av

$$x_3[t] = c_2^* \left(\sum_{i=c_2^{-1}}^{t-1} (1 - d_3)^{t-1-i} x_2[i - 1] \right), \quad c_2^{-1} < t < c_3^{-1}$$

$$x_3[t] = \gamma_3^{t+1-c_3^{-1}} x_3[c_3^{-1} - 1] + c_2^* \sum_{i=c_3^{-1}}^t \gamma_3^{t-i} x_2[i - 2], \quad t \geq c_3^{-1}$$

Då vi vet att $c_3^{-1} = 20$, $c_2^* = 0,125$ och att $\gamma_3 = (1 - 0,025)(1 - 0,125) = 0,853125$ får vi att

$$x_3[35] = \gamma_3^{16} x_3[19] + 0,125 \sum_{i=20}^{35} \gamma_3^{35-i} x_2[i - 2] \approx 12,66$$

Så av vår ursprungskull kan vi förvänta oss att tolv eller tretton personer pensioneras i OF3.

Vi kan gå vidare med OF4 och OF5, där vi använder oss av att $c_4^* = c_3^* = c_2^*$, $\gamma_4 = \gamma_3$ och att $c_4^{-1} = 28$

$$x_4[35] = \gamma_4^8 x_4[27] + 0,125 \sum_{i=28}^{35} \gamma_4^{35-i} x_3[i - 2] \approx 24,43$$

$$x_5[35] = \left(0,125 \sum_{i=28}^{34} 0,975^{35-i} x_4[i - 1] \right) - 2 \approx 25,23$$

Så alltså kan vi förvänta oss att 24 respektive 25 personer av vår ursprungskull pensioneras i respektive OF4 och OF5. Totalt är 67 av de ursprungliga 151 rekryterade kvar i systemet efter 35 år.

Om användaren önskar förändra det uppståndna läget finns möjligheten att förändra, i första hand, de värden som styr befordringarnas storlek och vid vilken tid de tidigast kan inträffa. Inget i modellen för pensionsavgångar hindrar att man ansätter värden på c_i^* eller c_i^{-1} fritt. I vårt exempel har vi låtit värdena för dessa hänga ihop enligt antagande 4), men detta måste inte göras för att modellen skall fungera. Exempelvis ger $c_1^* = 0,2$, $c_2^* = c_3^* = c_4^* = 0,1$ värdena $x_1[35] = 0,05$; $x_2[35] = 6,19$; $x_3[35] = 18,12$; $x_4[35] = 24,24$; $x_5[35] = 15,89$ och totalt 66 personer kvar till pensionering. En effekt av modellens konstruktion är att högre befordringstakt minskar avgångarna, vilket tydligt visas av exemplet. $\square$

9 Appendix 4: Lösningstablåer till exempel

Lösningstablåer Exempel 4 del 3:

Tableau #1

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
0.25	-0.166	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	1	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	1	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	1	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #2

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
1	-0.664	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	4	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	1	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	1	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	1	
0	0.0652	0.043	0.051	0.197	0.164	0	0	0	0	0	1	-0.164

Tableau #3

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	0	9.31	
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	0	8	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	1	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	1	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	1	
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	0	1	-0.686

Tableau #4

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	0	-1.16	0	-4	-5.31	-6.93	0	0	0	16.2
0	1	0	-1.75	0	0	-8	-10.4	0	0	0	18.4

0	0	1	-1.34	0	0	0	-8	0	0	0	8
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	1
0	0	0	0.223	0.197	0.164	0.522	1.02	0	0	1	-1.71

Tableau #5

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
1	0	0	0	-1.83	-4	-5.31	-6.93	-9.31	0	25.5
0	1	0	0	-2.76	0	-8	-10.4	-14	0	32.5
0	0	1	0	-2.12	0	0	-8	-10.8	0	18.8
0	0	0	1	-1.58	0	0	-8	0	0	8
0	0	0	0	0.143	0	0	0	-1	0	1
0	0	0	0	0.549	0.164	0.522	1.02	1.78	0	-3.5

Tableau #6

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
1	0	0	0	0	-4	-5.31	-6.93	-9.31	-12.8	38.4
0	1	0	0	0	0	-8	-10.4	-14	-19.3	51.8
0	0	1	0	0	0	-8	-10.8	-14.8	0	33.6
0	0	0	1	0	0	0	-8	-11	0	19
0	0	0	0	1	0	0	0	-6.99	0	6.99
0	0	0	0	0	0.164	0.522	1.02	1.78	3.84	-7.33

Lösningstablåer Exempel 4 del 2:

Tableau #1

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
0.25	-0.166	0	0	0	-1	0	0	0	0	5.32
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	56.2
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	1
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	1
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	1

Tableau #2

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

1	-0.664	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	21.3
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	56.2
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	1
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	1
0	0.0652	0.043	0.051	0.197	0.164	0	0	0	0	1	-0.872

Tableau #3

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	320	
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	449	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	1	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	1	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	1	
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	1	-30.2

Tableau #4

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	0	-1.16	0	-4	-5.31	-6.93	0	0	326	
0	1	0	-1.75	0	0	-8	-10.4	0	0	460	
0	0	1	-1.34	0	0	0	-8	0	0	8	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	1	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	1	
0	0	0	0.223	0.197	0.164	0.522	1.02	0	0	1	-31.2

Tableau #5

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	0	0	-1.83	-4	-5.31	-6.93	-9.31	0	336	
0	1	0	0	-2.76	0	-8	-10.4	-14	0	474	
0	0	1	0	-2.12	0	0	-8	-10.8	0	18.8	
0	0	0	1	-1.58	0	0	0	-8	0	8	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	1	
0	0	0	0	0.549	0.164	0.522	1.02	1.78	0	1	-33

Tableau #6

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	0	0	0	-4	-5.31	-6.93	-9.31	-12.8	0	349
0	1	0	0	0	0	-8	-10.4	-14	-19.3	0	493
0	0	1	0	0	0	0	-8	-10.8	-14.8	0	33.6
0	0	0	1	0	0	0	0	-8	-11	0	19
0	0	0	0	1	0	0	0	0	-6.99	0	6.99
0	0	0	0	0	0.164	0.522	1.02	1.78	3.84	1	-36.8

Lösningstablåer Exempel 4 del 1:

Tableau #1

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
0.25	-0.166	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5.32	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	56.2	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	0	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #2

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
1	-0.664	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	21.3	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	56.2	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	0	
0	0.0652	0.043	0.051	0.197	0.164	0	0	0	0	0	1	-0.872

Tableau #3

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	0	320
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	0	449
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	0

0 0 0.128 0.051 0.197 0.164 0.522 0 0 0 1 -30.2

Tableau #4

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	320
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	449
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	1 -30.2

Tableau #5

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	320
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	449
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	-0.125	0.197	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	1 -30.2

Tableau #6

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	320
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	449
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	-0.125	0.197	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	-0.143	0	0	0	0	1	0
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	1 -30.2

Lösningstablåer Exempel 3:

Tableau #1

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c
0.25	-0.166	0	0	0	-1	0	0	0	0	5.32
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	56.2
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	-22.8

0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	-51.3	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	-11.6	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #2

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
1	-0.664	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	21.3	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	56.2	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	-22.8	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	-51.3	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	-11.6	
0	0.0652	0.043	0.051	0.197	0.164	0	0	0	0	0	1	-0.872

Tableau #3

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
1	0	-0.866	0	0	-4	-5.31	0	0	0	0	320	
0	1	-1.3	0	0	0	-8	0	0	0	0	449	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	-22.8	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	-51.3	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	-11.6	
0	0	0.128	0.051	0.197	0.164	0.522	0	0	0	0	1	-30.2

Lösningstablåer Exempel 2:

Tableau #1

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
0.25	-0.166	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	
0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	2	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #2

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

0	0.125	-0.163	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	2	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #3

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
0	-0.125	0.163	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
0	0	0.125	-0.168	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	2	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #4

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
0	-0.125	0.163	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	0.125	-0.197	0	0	0	-1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	2	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #5

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c		
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
0	-0.125	0.163	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	-0.125	0.197	0	0	0	1	0	0	0	
0	0	0	0	0.143	0	0	0	0	-1	0	2	
0.041	0.038	0.043	0.051	0.197	0	0	0	0	0	0	1	0

Tableau #6

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-0.125	0.163	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	-0.125	0.168	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	-0.635	1	0	0	0	5.08	0	0	0
0	0	0	0.0907	0	0	0	0	-0.726	-1	0	2
0.041	0.038	0.043	0.176	0	0	0	0	-1	0	1	0

Tableau #7

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-0.125	0.163	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	-0.744	1	0	0	0	5.95	0	0	0	0
0	0	-0.472	0	1	0	0	3.78	5.08	0	0	0
0	0	0.0675	0	0	0	0	-0.54	-0.726	-1	0	2
0.041	0.038	0.174	0	0	0	0	-1.05	-1	0	1	0

Tableau #8

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
-0.25	0.166	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-0.767	1	0	0	0	6.13	0	0	0	0	0
0	-0.571	0	1	0	0	4.56	5.95	0	0	0	0
0	-0.362	0	0	1	0	2.9	3.78	5.08	0	0	0
0	0.0518	0	0	0	0	-0.414	-0.54	-0.726	-1	0	2
0.041	0.171	0	0	0	0	-1.07	-1.05	-1	0	1	0

Tableau #9

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
-1.51	1	0	0	0	6.02	0	0	0	0	0	0
-1.15	0	1	0	0	4.62	6.13	0	0	0	0	0
-0.859	0	0	1	0	3.44	4.56	5.95	0	0	0	0
-0.545	0	0	0	1	2.18	2.9	3.78	5.08	0	0	0
0.078	0	0	0	0	-0.312	-0.414	-0.54	-0.726	-1	0	2
0.299	0	0	0	0	-1.03	-1.07	-1.05	-1	0	1	0

Tableau #10

x1	x2	x3	x4	x5	s1	s2	s3	s4	s5	-c	
0	1	0	0	0	0	-8	-10.4	-14	-19.3	0	38.6
0	0	1	0	0	0	0	-8	-10.8	-14.8	0	29.6
0	0	0	1	0	0	0	0	-8	-11	0	22
0	0	0	0	1	0	0	0	0	-6.99	0	14
1	0	0	0	0	-4	-5.31	-6.93	-9.31	-12.8	0	25.7
0	0	0	0	0	0.164	0.522	1.02	1.78	3.84	1	-7.67